日本語版監修　砂田利一

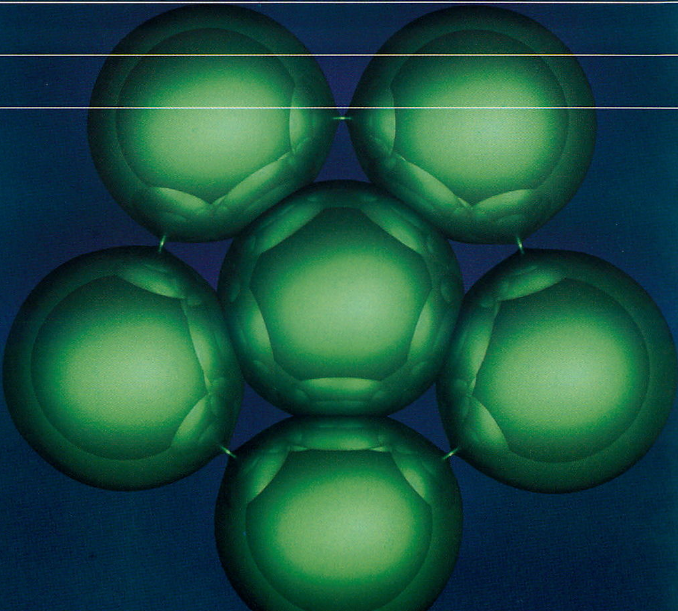
V.I. アーノルド／M. アティヤ
P. ラックス／B. メイザー…編

Mathematics: Frontiers and Perspectives

# 数学の最先端 21世紀への挑戦

volume 5

- A. ベイカー／G. ヴュストルツ
- Yu.I. マニン
- B. メイザー
- S.-T. ヤオ



Springer

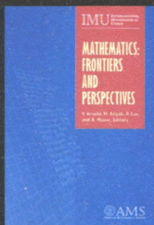
シュプリンガー・フェアラーク東京

●日本語版監修　砂田利一

Mathematics: Frontiers and Perspectives

# 数学の最先端 21世紀への挑戦

volume 5




編者…V.I. アーノルド
M. アティヤ
P. ラックス
B. メイザー

Paris 1900
Heidelberg 1904
Roma 1908
Cambridge,UK 1912
Strasbourg 1920
Toronto 1924
Bologna 1928
Zürich 1932
Oslo 1936
Cambridge, USA 1950
Amsterdam 1954
Edinburgh 1958
Stockholm 1962
Moskva 1966
Nice 1970
Vancouver 1974
Helsinki 1978
Warszawa 1982
Berkeley 1986
Kyoto 1990
Zürich 1994
Berlin 1998
Beijing 2002

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

# 本巻の収録内容について

『数学の最先端　21 世紀への挑戦』の第 5 巻目である本書は，

| | |
|---|---|
| ベイカー/ヴュストルツ | 数論，超越数論とディオファントス幾何学 |
| マニン | 職業および使命としての数学 |
| メイザー | $p$ 進変動の主題 |
| ヤオ | 幾何と解析の展望 |

の 4 点を収録している．他の巻と同様に，本巻でも現代数学の第一線で活躍している数学者による，21 世紀数学への展望が与えられている．将来に何が可能なのか，また解くべき問題は何かについて，それぞれの深い見識を基にして自由に語られているのである．たとえ内容の詳細にはアクセスすることができなくても，知性への挑戦である数学という学問の「深さ」を，読者は実感することができるだろう．

ベイカー氏は，不定方程式と不定不等式の理論のリーダーであり，氏の仕事が当該分野に引き起こしたインパクトは計り知れないものがある．与えられた実数の超越性判定問題と，不定方程式の解のエフェクティブな評価を求める問題は，ヒルベルトの問題から派生し，現在でも代数幾何学との相互作用の下で大きく発展しつつある．ベイカー氏の論説は，この動向を的確に解説している．

マニン氏は，代数幾何学から数理物理まで，数学全般に多大な寄与をした「鬼才」である．編者自身の昔の研究 (正則写像の有限性) が，マニン氏の 1 つの仕事に関係していたこともあり，氏の論説を訳出する機会を得たことは栄誉と考えている．この論説では，氏の数学者人生を回顧しながら，職業あ

るいは使命としての数学の行くべき道を示唆し，さらに物理学との関わりに重点を置いた解説を行っている．

メイザー氏は，数論の世界の大立者である．フランスの高等科学研究所でお目にかかる機会があったが，そのエネルギッシュな雰囲気は印象的であった．氏の解説では，$p$ 進数を主題としている．実数は有理数の「穴を埋める」ことにより得られるが，素数 $p$ を使っても有理数の「穴を埋める」ことができる．こうして得られた数は $p$ 進数とよばれ，これを実数と同格に扱うことによって，ゼータ関数の深い意味を探ろうというのが，メイザー氏の論説の意図するものである．数論が，将来も「数学の女王」であることを実感する内容である．

ヤオ氏の論説は，微分幾何学と解析学の接点である「幾何解析学」における数多の未解決問題の解説に当てられている．ヤオ氏の幾何学への貢献は多大であり，その牽引力には眼を瞠るものがある．氏は，これまでも未解決問題を提示することにより，幾何学の発展に道筋をつけてきたが，本論説では最新の状況を述べ，問題の背景とその本質に迫る解説を与えている．

全体として，それぞれが数学の力強い鼓動を感じるさせる論説であり，読者の興味を十分に満足させるものと信ずる．

2004 年 7 月　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　砂田　利一

**Translation of selected chapters**
Page 1, A. Baker and G.Wüstholz, *Number theory, transcendence and Diophantine geometry in the next millennium*
Page 153, Yu. I. Manin, *Mathematics as profession and vocation*
Page 433, B. Mazur, *The theme of p-adic variation*
Page 353, S.-T. Yau, *Review of geometry and analysis*

from the English language edition of
*Mathematics: Frontiers and Perspectives*
edited by V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur

Published by the American Mathematical Society.

V.I. アーノルド／M. アティヤ／P. ラックス／B. メイザー 編

# 数学の最先端 21世紀への挑戦

volume 5

Mathematics: Frontiers and Perspectives

● A. ベイカー／G. ヴュストルツ
● Yu.I. マニン
● B. メイザー
● S.-T. ヤオ

# 数論,超越数論とディオファントス幾何学

## ――――――新しいミレニアムを迎えて

Number Theory, Transcendence and Diophantine Geometry in the Next Millennium

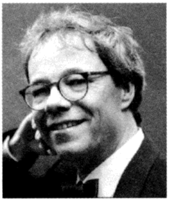
A. ベイカー／G. ヴュストルツ　　●訳：平田 典子（日本大学）



【著者紹介】

**アラン・ベイカー** (*Alan Baker*)

1939年ロンドンに生まれる．
ロンドンカレッジで学んだ後，ケンブリッジ大学トリニティカレッジに移り，1964年博士号取得，同校フェローとなる．
プリンストン高等研究所，スタンフォード大学を経て，1974年ケンブリッジ大学教授となり，現在にいたる．
ディオファントス問題における業績により，1970年ニースで開かれた国際数学者会議にてフィールズ賞を受賞．1973年より王立協会フェロー．



**ギスバート・ヴュストルツ** (*Gisbert Wüstholz*)

1948年にドイツのトゥットリンゲンに生まれる．
フライブルク大学で数学と物理を学び，1977年同大学で博士号を取得．
ボン大学，マックス・プランク数学研究所を経て1985年ブッパータール大学教授．
1987年チューリッヒ工科大学教授となり，現在にいたる．

# 1　はじめに

今日，最も挑戦に値する数学の問題は何であろうか．新しいミレニアムを迎え，改めて問うてみたいと思う．ヒルベルトも同じ問いかけを 1900 年に行い，著明な 23 個の問題を提出した[1]．それらの問題提起が数学の未来の発展を導くものとなるに違いない，と彼は信じていたのである．以来，多くの偉業が実際に達成され，数学全体が見事に花開いてきた．このことを考えると，ヒルベルトをまねて同様の試みをするのは我々等には到底不可能かもしれない．しかし数論と代数幾何学は数学の進展の要となる分野であり，これからも今迄以上に重要な役割を果たすと思われるので，ここで以下を論じることを許されたい．最初に，どのようにして超越数論とディオファントス幾何学が数学の多岐にわたり役に立つ美しい広大な理論になったのかを解説する．次いでその広範囲にわたる研究から浮き彫りになったいくつかの重要な問題を述べる．

まず，当初は大層かけ離れた別々のものに思われたヒルベルトの 3 つの問題が，融合して数論と幾何学の間の相互作用を引き起こす触媒となったことに目を向けよう．

第 12 問題[2]．これは有名な「クロネッカーの青春の夢 (Jugendtraum) [3]」に緒を発し，数学の近代化の指針としてモジュラー多様体の領域の将来に新しい道を開いた問題である．ホッジ理論，数論的群，代数群と結びつき，志村多様体の有理点に関する深い考察に密接に関連していることも述べること

---

[1] (訳注) [20] 参照.

[2] (訳注) クロネッカー-ウェーバーの定理「有理数体の全てのアーベル拡大は 1 のべき根を添加した体，つまり円分体の部分体として得られる」を代数体 (虚 2 次体) を基礎体とした場合に拡張できるか.

[3] (訳注) 「虚 2 次体の任意のアーベル拡大は虚数乗法によって得られる，即ち楕円モジュラー関数の虚 2 次体の元における値と 1 のべき根により生成される」という予想．これは「虚 2 次体の任意のアーベル拡大はその虚 2 次体を虚数乗法に持つ楕円関数の周期の等分点と楕円モジュラー関数の虚 2 次体の元における値により生成される」という形に修正され，後述のように類体論の完成に伴い解決された．[22], [25] 参照.

にする．第 12 問題から第 7 問題[4]を経て対数 1 次形式[5]の理論とその可換代数群上の一般化が導かれるが，これはディオファントス方程式[6]のエフェクティブな[7]解を求める問題において最も決定的な道具となる．それは数学の深い古典的問題の 1 つである第 10 問題[8]の解答も与える．

以上 3 問はシンプルかつ深い予想といわれる $abc$-予想と合わせて考究するとその関連性がとりわけ明白となる．$abc$-予想は数論の将来的な解明を方向付けるカギと考えられているものであり，第 4 節で説明する．またいくつかの重要なディオファントス問題を第 5 節において取り上げる．

## 2 ヒルベルトの第 12 問題

19 世紀の数学の偉大な成就の 1 つは代数的整数論の確立である．極めて基礎的な 2 つの発見として，まずはガロアによる 5 次以上の方程式の非可解性の証明[9]がある．そして有理数体の任意のアーベル拡大は円分体 (1 のべき根，すなわち $z$ が有理数のときの指数関数 $e^{2\pi iz}$ の値を有理数体に添加して得られた体) の部分体であることを示したクロネッカー-ウェーバーの定理があげられよう[10]．後者の問題に対してクロネッカーはさらなる考察を行い，代数体の任意のアーベル拡大体も同様にその代数体にある解析関数の特殊値を添加して生成されるのではないかという考え，即ち先のクロネッカーの青春の夢と称される予想に到る．クロネッカーの後，ヒルベルトがこの問題を再考察し第 12 問題として次のようにまとめた：虚 2 次体の任意のアーベル拡

[4] (訳注) $2^{\sqrt{3}}$ や $e^{\pi}$ は超越数になるか，という問題．但し整数係数 1 元方程式の解となる数 (複素数になる) を代数的数と呼び，そうでない複素数を超越数という．本文後述のように肯定的に解決．

[5] (訳注) 0 でない代数的数の対数の代数的数係数 1 次結合，およびその拡張をさす．

[6] (訳注) 整数係数の多変数多項式の整数解を求める問題を考える際の方程式，及びその種々の拡張．

[7] (訳注) 与えられた情報を用いて有限回の操作で有限時間内に具体的に計算可能なアルゴリズムを持つ，という場合にエフェクティブ (effective) と称する．

[8] (訳注) ディオファントス方程式の整数解を求めるエフェクティブな一般的方法を見つけよ．否定的に解決された．

[9] (訳注) 5 次以上の 1 元方程式は，四則計算とべき根のみでは一般的には解けないという事実．

[10] (訳注) この理論にはアーベルの寄与が大きい．歴史的推移については [25] 参照．

大体は，その虚 2 次体に楕円モジュラー関数の値を添加したもので与えられるであろうか．ウェーバー，ブルーメンタール (Blumenthal)，ヘッケ，高木貞治，ハッセらによる 20 世紀初めの数十年にわたる鋭意努力の末，この問はクロネッカーの意に添う解決を得て，類体論の起源となった．ヒルベルトの第 12 問題に関する歴史等については [35] を参照．

さて楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ は楕円曲線の理論に密接に関連している．少し復習しよう．$\mathbf{R}$ 上 1 次独立な $\omega_1, \omega_2$ を基底とする $\mathbf{C}$ 内の格子 $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ を考える．格子の元を周期とするワイエルシュトラスの楕円関数 $\wp(z)$ は

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

で与えられる．またアイゼンシュタイン (Eisenstein) 級数である

$$g_2 = g_2(\Lambda) = \frac{1}{60}\sum \omega^{-4}, \quad g_3 = g_3(\Lambda) = \frac{1}{140}\sum \omega^{-6}$$

を考える．ここで和はいずれも $\omega \in \Lambda, \omega \neq 0$ をわたるものとする．$\wp(z)$ は $\omega$ を周期とする有理型関数で，代数的な微分方程式

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

をみたすことが知られている．従って $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ で与えられる楕円曲線 $E$ に対し $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ はパラメーター表示となり，複素トーラス $\mathbf{C}/\Lambda$ と楕円曲線の間の解析的同型を与える．$E$ の判別式は

$$\Delta = \Delta(E) = g_2^3 - 27g_3^2$$

で定められる．上半平面の元 $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ の関数としてみなすと級数 $g_2, g_3$ はモジュラー群 $\Gamma := SL_2(\mathbf{Z})$ に関するモジュラー形式であり，それぞれ重さ 4，重さ 6 となる．$\Delta$ も $\tau$ の関数として見ると重さ 12 のモジュラー形式となり，$\Delta(\tau) \neq 0$ であることがそのフーリエ級数展開からわかる．$2^6 3^3 g_2^3/\Delta$ の形で定められる関数 $j(\tau)$ は重さ 0 であり，$j(\tau)$ は上半平面における $\Gamma$-不変なモジュラー関数となる．この $j(\tau)$ を楕円モジュラー関数または $j$ 関数と称する[11]．

[11] (訳注) フーリエ級数展開とその証明は例えば [2] 参照．楕円曲線一般については例えば [38] 参照．

今，$K$ を虚 2 次体とする．$K$ の分数イデアル $\mathfrak{a}$ の $\mathbf{Z}$-加群としての基底 $\omega_1, \omega_2$ を，その商 $\tau$ が $\Gamma$ の基本領域に属するようにとる．このとき $\mathfrak{a}$ を周期格子とする楕円曲線が構成され，$\tau = \tau(\mathfrak{a}) \in K$ である．ヒルベルトの第 12 問題に関わる前述の人々の優れた業績より次が得られる．$h$ を $K$ の類数，$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ を $K$ のイデアル類群の代表イデアルの 1 組とすると，$\tau$ に対する楕円モジュラー関数の値 $j(\tau)$ は代数的整数[12]で，その $K$ 上の全ての共役元は $j(\tau(\mathfrak{a}_1)), \ldots, j(\tau(\mathfrak{a}_h))$ で与えられ，$j(\tau)$ は $K$ のヒルベルト類体 (絶対類体)，つまり最大不分岐アーベル拡大を生成することがわかる[13]．これら一連の結果はドイリング (Deuring)，志村五郎，谷山豊，ヴェイユらの深い洞察の出発点となるもので，志村多様体の研究に基づき，いわゆる CM-体等の一般的な概念の確立へと発展した[14]．

では次の問題を考えてみよう．先の絶対類体は，有理数体 $\mathbf{Q}$ に指数関数または楕円モジュラー関数，あるいはその高次元版の類似の関数の値を添加して得られるような代数体に限るであろうか．超越数論がその答えを与える．クロネッカーが青春の夢を見たその 19 世紀のほぼ同時期に，リンデマン (Lindemann) がエルミートによる飛躍的考察の定式化を行い，次の結果をまとめた：$z$ が 0 でない代数的数のとき，$e^z$ は超越数である (エルミート-リンデマンの定理)．特にオイラーの恒等式 $e^{i\pi} = -1$ より，$\pi$ の超越性が従う．これより古代ギリシャの円積問題 ([3] 参照) における正方形の作図可能性は否定される[15]．ヒルベルトはこのエルミート-リンデマンの定理に触発され，代数的数 $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ と有理数ではない代数的数 $z$ に対し $\alpha^z$ は超越数

---

[12] (訳注) $\tau$ は 2 次の実でない代数的数であり，この楕円曲線は虚数乗法を持つ．虚数乗法を持てば $j(\tau)$ は代数的整数．$K$ のイデアル類 $C$ に属する 1 つのイデアル $\mathfrak{a}$ から $\tau$ を作り $j(\tau)$ を考えるこの対応は，イデアル類 $C$ によってのみ定まる．

[13] (訳注) つまり $L := K(j(\tau(\mathfrak{a}_1)), \ldots, j(\tau(\mathfrak{a}_h))) = K(j(\tau(\mathfrak{a}_k))), \quad (k = 1, \ldots, h)$ は $K$ の絶対類体．絶対類体とは有限次代数体 $k$ の 1 次の素イデアル $p$(有理数体へのノルムをとると素数となるイデアル) が $k'/k$ において完全分解するのは $p$ が単項イデアルの場合に限る，という定義をみたす $k$ の有限次ガロア拡大体 $k'$ である．このような絶対類体はただ 1 つ存在し不分岐アーベル拡大で，そのガロア群は $k$ のイデアル類群と同型となる．そして単項化定理により，$k$ の任意のイデアルは $k'$ まで持ち上げれば必ず単項イデアルになる．

[14] (訳注) 虚数乗法の理論と類体論，ヒルベルトの第 12 問題の概要は [22] に明解に述べられている．

[15] (訳注) 半径 1 の円と同じ面積を持つ正方形の 1 辺は定規とコンパスで作図可能かという問題．

になるか，という問題に相当する第 7 問題を提出した．この問題は 1934 年にゲルフォント (Gel'fond) とシュナイダー (Schneider) により独立に肯定的解決を与えられた (ゲルフォント-シュナイダーの定理)．この系として，代数的数 $z$ の関数 $e^{2\pi iz} = (-1)^{2z}$ は，$z$ が有理数である場合に限り代数的な値をとることがわかる．即ち有理数体に $e^{2\pi iz}$ の値を添加した体は $z$ が有理数の場合のみ代数体となって先の疑問に対する情報を与える．ゲルフォント-シュナイダーの定理は華やかな研究の時代の幕開けとなった．特にシュナイダーらにより楕円関数，アーベル関数の値についての深い研究が始められ，虚 2 次でない任意の代数的数 $z$ に対し $j(z)$ の値は超越数になるという著明な結果の発見に到る[16]．これは明らかに虚 2 次体上のヒルベルト類体の先の問題の答えとなる[17]．

超越数論の重要な進歩として，1960 年代にベイカーによって証明された次の定理があげられる：$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が 0 と異なる代数的数で，

$$\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$$

が有理数体上 1 次独立であると仮定する．このとき $1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ は $\overline{\mathbf{Q}}$ 上 1 次独立となる．ここで $\overline{\mathbf{Q}}$ は全ての代数的数のなす体を表す．ベイカーの定理の特別な場合としてエルミート-リンデマン，ゲルフォント-シュナイダーの定理が従う．ベイカーの一連の仕事はその後の多くの深遠な研究の基礎となった．特に重要なものとして群構造を持つ代数多様体における零点評価と呼ばれる定理が後に示されるが，これはベイカーの定理を可換連結代数群上に拡張するために要する基本的な命題である．1983 年に，ヴュストルツにより決定的な一般化である解析的部分群定理が得られた [45]．これを簡潔に述べてみよう：代数体上の可換代数群のある解析的な部分群が非自明な有理点を含むのは，それが非自明な代数的部分群を含むときに限る[18]．ベイカー

---

[16] (訳注) シュナイダーの定理 [36].

[17] (訳注) 虚数乗法論の逆問題の肯定.

[18] (訳注) ヴュストルツの定理を正確に述べると次のようになる：代数体上定義された可換連結代数群 $G$ と $G$ の原点における接空間 $T$ から $G$ への解析的準同型を与える指数写像 (指数関数の一般化と見なせる) を考える．$G$ の有理点 $P$ の指数写像の逆象の 1 つの元 $u$ が $u \neq 0$ ととれるとき，$T$ 内の代数的数係数線形部分空間 $W$ にその $u$ が属するのは，$G$ の代数的真

の定理は $G$ がトーラス[19]の積の場合に相当する．解析的部分群定理は，前述の虚数乗法論の逆問題肯定の高次元化である CM-体での一般化を示したコーエン (Cohen) [13] や志賀-ヴォルファルト (Wolfart) [37] の結果の証明に用いられた．

解析的部分群定理の $p$ 進数体での翻訳や，非可換代数群の場合におけるその類似は，これからの研究発展の基礎となるかもしれない．さらに過去 30 年間にわたって得られたこの定量化，すなわち対数 1 次形式の評価の発展とその拡張も興味深い．それはディオファントス方程式の整数解決定の重要な道具となるものである (第 5 節参照)．アーベル多様体間の同種写像[20]の次数の評価を与えたマッサー (Masser)-ヴュストルツの定理 [26] はその応用であり，評価の改良はどこまで可能かという問題も特に挑戦の価値がありそうである．或いはファルティングス (Faltings) 高さを用いない記述は可能であろうか．定量的な評価を求めることは実際難しいが，その成功は古典的な問題に対する様々な帰結を従えてきた．例えばジーゲルの類数についての問題に対する答えや，メイザー (Mazur)，メレル (Merel) の楕円曲線のねじれ群に関する結果などである．また後述のように解析的部分群定理の応用を考えることで類体論に関する新しい問題との結びつきも期待できる．

## 3　超幾何関数の理論

超幾何関数の理論は少なくともガウスまで遡り，数学の歴史の中で大切な位置を占めている．近年においては，数論に著しい応用のあった格子についてのドゥリーニュ(Deligne)，モストフ (Mostow)，マルグリス (Margulis) らの業績，そして代数曲面のトポロジーについてのヒルツェブルフ (Hirzebruch) の仕事，数理物理に対するゲルファント (Gelfand)，カプラノフ (Kapranov)，ゼルヴィンスキー (Zelevinsky) らの貢献において，顕著にその重要性があらわれている．数論に関係する場面では，超幾何関数は射影曲線の分岐被覆に

部分群 $G'$ で原点における接空間が $W$ に含まれるものが存在し，$G'$ に $P$ が属するときに限る．

[19] (訳注) 可換連結代数群としての乗法群，つまり 0 以外の複素数全体のなす乗法群のこと．

[20] (訳注) アーベル多様体の間の非自明な解析的全射準同型写像のこと．

相当するディオファントス方程式の解を求めるためのトゥエ (Thue)-ジーゲル-ベイカーの方法で用いられる．またリーマンのゼータ関数の値 $\zeta(3)$ の無理数性[21]を示したアペリ (Apéry) の方法のボイケルス (Beukers) により整理された証明にも登場する．この節では超幾何関数の値に関するヴォルファルトの驚くべき発見について議論してみたい．

古典的なガウスの超幾何関数は

$$F(a,b,c;z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2 + \cdots$$

という級数で与えられる．ここで $a,b,c$ は実数とし，$c$ は 0 と負整数の値を取らないとする．超幾何関数は線形微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\frac{dF}{dz} - abF = 0$$

をみたす．以下 $a,b,c$ が有理数の場合に限る．超幾何関数の値は微分方程式のモノドロミー群に深く関わるが，モノドロミー群はもともと解空間の基本群の自然な線形表現の像として定められており，今の場合 $0,1,\infty$ の 3 点が微分方程式の特異点なので，基本群は 1 次元射影空間からこれらを除いた $\mathbf{P}^1 - \{0,\ 1,\ \infty\}$ のそれとなることを注意しておく．

シュワルツの 1873 年の著名な定理は，モノドロミー群が有限群ならば超幾何関数は代数関数であることを示すものである．基本的な例として，任意の有理数 $\nu$ に対し 2 項関数

$$F(-\nu,1,1;z) \;=\; (1-z)^{\nu}$$

は代数関数である．今，代数的数 $\alpha$ に対して $z=\alpha$ での超幾何関数の値が代数的になる場合に $\alpha$ を超幾何関数の特異モジュールと称することにする．従って特異モジュールとなる $\alpha$ が 1 つ存在すると仮定すると，モノドロミー群が有限群ならばシュワルツの定理より定義域内の他の全ての代数的数もやはり特異モジュールとなる．一方竹内喜佐雄のリスト[22]より，モノドロミー

[21] (訳注) T. リヴォアル (Rivoal) の寄与による最近の発展 [7], [34] が著しい．その W. ズドゥリン (Zudilin) による改良は次のように述べられる：4 数 $\zeta(3),\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9)$ のうち少なくとも 1 つは無理数である [46], [47].

[22] (訳注) [42].

群が数論的[23]となる場合全ての 85 組の $(a,b,c)$ がわかっているが，このとき対応する超幾何関数は超越関数で，ヴォルファルトの仕事 [44] から特異モジュールは無限個存在することがわかる．そして先の「クロネッカーの青春の夢」を連想するような，超越関数の値で生成された代数体を与える特記すべき例をボイケルス-ヴォルファルト [12] が次のように求めている：

$$F(\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{2};\frac{1323}{1331})=\frac{3}{4}\sqrt[4]{11}.$$

シュワルツによっても竹内においても調べられていないのはモノドロミー群が数論的でない無限群の場合であるが，このときは一般に特異モジュールは高々有限個に限ると予想されている．これは未解決．さらに将来数論幾何学にも関わるであろう下記の面白い問題を提起している．

まず事実として，超幾何関数の $z$ での値はアーベル積分の商で書けることが知られている．

$$F(a,b,c;z)\int_0^1\omega(u,0)\;=\;\int_0^1\omega(u,z).$$

但し $\omega(u,z)$ は微分形式

$$u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-zu)^{-a}du$$

を指す．積分記号は微分形式の周期を表し，$\int_0^1\omega(u,0)$ は古典的な Beta-関数の値 $B(b,c-b)$ に他ならない．$\alpha$ が $F$ の特異モジュールならば，この式より，$z=\alpha$ のときに対応する周期の商は代数的数である．これら周期はアーベル対数[24]とみなせ，従ってヴュストルツの定理の枠組みで捉えられる．そうすると特異モジュールが有限個か否かという先の未解決問題を，数論的幾何学の基本的な問題の 1 つである志村多様体の場合のアンドレ (André)-オールト (Oort) の予想 [1], [31] に帰着させることが可能となる[25]．志村多様体の

---

[23] (訳注) $GL(n,\mathbf{R})$ の部分群 $G$ において $G\cap GL(n,\mathbf{Z})$ またはこれと通約的な部分群を数論的群という．もう少し一般的な定義もある．

[24] (訳注) アーベル多様体の有理点の指数写像による逆像を指す．

[25] (訳注) 一般的な予想は様々だが，例えば次のようなものがある：$A_g(\mathbf{C})$ を次元 $g$ の主偏極アーベル多様体のモジュライ空間とする．$Z$ は $A_g(\mathbf{C})$ の既約な代数部分多様体で，$Z$ の虚数乗法点はザリスキー (Zariski) 位相で稠密とする．このとき $Z$ は $A_g(\mathbf{C})$ のホッジ型の部分多様体であろう．

場合におけるアンドレ-オールトの予想は，$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の任意の代数曲線が $(1, j(\tau_1)) \times (1, j(\tau_2))$ の形の無限個の点 (ここで $\tau_1, \tau_2$ は虚 2 次数とする) を含むならばこの代数曲線はモジュラー曲線に限る，と主張している．現時点ではこの場合が唯一アンドレとエディクスホーヴェン (Edixhoven) により解決済みであり，一般の場合の証明が待たれる[26]．

ここで示されたような超越数論と幾何学との豊かな相互作用は今後もさらに発展するであろう．特に，ホッジ理論と数論的群についてのドゥリーニュ，モストフの深い結果に関連する多変数超幾何関数にも同様の問題提起が考えられる．特異モジュールの話題を関連するベクトルバンドルの話やモジュラー多様体の一般論に広げることも可能である．難しく野心的な発想のヒントを解析的部分群定理が与えるかもしれない．

## 4　*abc*-予想

これからの数論において極めて挑発的な未解決問題は *abc*-予想と呼ばれるもので，次のような簡単な命題である：整数 $a, b, c$ は

$$a + b + c = 0, \quad (a, b, c) = 1$$

をみたすとする．ここで $(a, b, c)$ とは $a, b, c$ の最大公約数である．このとき，任意の正の数 $\epsilon > 0$ に対し

$$\max(|a|, |b|, |c|) \ll N^{1+\epsilon}$$

が成立するであろう．但し $N$ を $abc$ のコンダクター (またはラディカル)[27] とし，$\ll$ に含まれる定数は $\epsilon$ にのみ依存するとする[28]．この予想は最初オステルレ (Oesterlé) により，このような $\epsilon$ が存在するかもしれないという弱い形で述べられ，続いてマッサーにより精密化された上記の形として予想された．オステルレの動機はもともと楕円曲線についてのスピロ (Szpiro) の予想にあ

---

[26] (訳注) 現状での関連結果は [32] 参照．

[27] (訳注) $N = \prod_{p|abc} p$，つまり $abc$ を割る異なる素数全部を 1 個ずつ掛けたもの．

[28] (訳注) この $\ll$ は「任意の正の数 $\epsilon > 0$ に対し，$\epsilon$ にのみ依存する定数 $C > 0$ が存在して $\max(|a|, |b|, |c|) \leq C \cdot N^{1+\epsilon}$ となる」と読む．

り，またマッサーは対数1次形式を用いた関数体上での $abc$-予想のメイソン(Mason) による解決から精密化のヒントを得たとされている．

$abc$-予想からは下記の沢山の重要な結論が導かれ，その多くは簡単な議論のみで得られる．まず，特に $\ll$ に含まれる定数[29]がエフェクティブに計算可能ならば，与えられた $r, s, t$ に対し指数型のディオファントス方程式

$$rx^l + sy^m + tz^n = 0$$

の整数解 $x, y, z, l, m, n$ を原理的に決定しうる．ここで $l, m, n$ は $(1/l) + (1/m) + (1/n) < 1$ をみたす正整数とする．$abc$-予想はフェルマの大定理[30]とカタラン (Catalan) 予想[31]を含む．さらにファルティングスによって解かれた有名なモーデル予想も $abc$-予想から従うことがエルキース (Elkies) により示されている[32]．またランジュヴァンとボンビエリ (Bombieri) により，代数的数の有理数による近似についてのロス (Roth) の定理[33]を与えることもわかった．さらにヴォイタ (Vojta) による $abc$-予想の代数体における一般化から，ある場合のディリクレ $L$-関数に対するジーゲル・ゼロの非存在性と呼ばれる未解決予想も示されることがグランヴィル (Granville) とスターク (Stark) により証明された[34]．第5節で説明するように，$abc$-予想はオイラーの *numeri idonei* 問題も解明する．従って，もしも $abc$-予想が解かれれば，この50年間あるいはそれ以後において最大の数論の包括的進歩となるに違いない．

さて $abc$-予想と対数1次形式との間には密接な関連がある．実際，予想よりはるかに弱いながらも，$\max(|a|, |b|, |c|)$ に対する非自明な評価を与える現在唯一の方法が対数1次形式である．例えばスチュワート (Stewart)-ユー (Yu) による評価 [39] は $\max(|a|, |b|, |c|) \ll \exp(N^{(2/3)+\epsilon})$ となる．それは，アルキメデス付値と非アルキメデス付値の両方における様々な対数1次形式の精密な不等式による．現在のところこの方法から得られるものは強力な $abc$-予想の評価には遠いが，対数1次形式の理論による到達の可能性もないわけでは

---

29 (訳注) 訳注 28 の中の $C$ を指す．

30 (訳注) ワイルズ (Wiles) により解決された．例え [43] 参照．

31 (訳注) ミハイレスク (Mihăilescu) が完全解決．[8], [28] 参照．

32 (訳注) [9] 参照．

33 (訳注) [24] 参照．

34 (訳注) [17] 参照．

ない．説明のため，ベイカー [4] により定式化された強い対数 1 次形式評価の予想をあげよう．$\omega(n)$ を整数 $n$ を割る異なる素数の個数とする．$\omega = \omega(abc)$ とおく．整数 $a, b, c$ が $a+b+c = 0$, $(a,b,c)=1$, をみたすとき，ベイカーの予想とは

$$\max(|a|,|b|,|c|) \ll N(\log N)^{\omega}/\omega!\,,$$

あるいは絶対定数 $\kappa > 0$ が存在して

$$\max(|a|,|b|,|c|) \ll \epsilon^{-\kappa\omega(ab)} N^{1+\epsilon}$$

が成立することである (この 2 ケ所の $\ll$ に関する定数は絶対定数とする)．今

$$\Lambda = u_1 \log v_1 + \cdots + u_n \log v_n$$

という対数 1 次形式を考えよう．但し $v_1, \ldots, v_n$ は正整数，$u_1, \ldots, u_n$ は全てが 0 ではない整数とする．$\Lambda \neq 0$ とすると，最大公約数 1 である正整数 $a, b$ を用いて $\Lambda = \log(a/b)$ と一意的に書ける．$c = a - b$ とおく．$p$ が $c$ の素因数ならば，$\log(a/b)$ の $p$-進での意味は定まり[35] $|\Lambda|_p = |c|_p$ となることに注意しておく．$p$ が $c$ を割らないときは，単に $|\Lambda|_p = 1$ とおく．$a, b, c$ が全て正で $a = b + c$ をみたすとき，$\max(|a|,|b|,|c|)$ に対する先の 2 番目の予想は $v = v_1 \cdots v_n$，$N(v)$ を $v$ のコンダクターとし

$$\Xi = \min(1, |\Lambda|) \prod \min(1, p|\Lambda|_p)$$

($\prod$ は素数 $p$ 全てをわたる) とおくとき

$$\Xi \gg (N(v))^{-1} (\epsilon^{\kappa\omega(v)} a^{-\epsilon})^{1/(1+\epsilon)}$$

という評価と同値になることが知られている．この右辺は対数 1 次形式表示によらないので，絶対的で非常に強い予想評価式であることを意味する．$\omega(v) \ll \frac{\log v}{\log\log v}$ および $N(v) \leq v$ であることを用いると，$u = \max |u_j|$ とおいて

$$\log \Xi \gg -\log u \log v$$

というやや弱い予想不等式も記述できることも注意しよう．この最後の形を

---

[35] (訳注) $p$-進付値や $p$-進の対数関数については例えば [23] 参照．

すでに証明されているものと比べることができる．例えば第5節で述べるベイカーとヴュストルツによる基本的な定理の特別な場合として

$$\log|\Lambda| \gg -\log u \log v_1 \cdots \log v_n$$

が既知である．ここで，$\gg$ に含まれる定数は $n$ のみによる．類似の結果がその $p$ 進付値 $|\Lambda|_p$ に対しても成り立つ．さらに，これら各付値での今迄の $|\Lambda|$ についての諸結果を発展させ，$\log|\Lambda|$ の評価の積 $\log v_1 \cdots \log v_n$ を和

$$\log v = \log v_1 + \cdots + \log v_n$$

に置き換えて $\Xi$ の下からの評価を強められるか，という問題も考えられよう．これは $abc$-予想の主な応用に対して十分強いものである．

## 5 ディオファントス問題

今まで興味を抱いてきた種々の問題のうち，対数1次形式等で一部進展したがそれでも完全には解決されていない問題について述べよう．次のミレニアムでも数学者の心を魅するものと思いたい．

ファルティングスにより1983年にモーデル予想が解決されて種数2以上の代数曲線の有理点は有限個であると示されたにも拘わらず，種数1以上の代数曲線の整数点が有限個であるというジーゲルの定理のエフェクティブな証明はまだ得られていない．例えばトゥエの方程式によって定まる代数曲線の整数点が理論的に全て計算しうる事実は，ベイカーが1968年から1969年にかけて超楕円型[36]の場合に示している．また，種数1の代数曲線については楕円型に帰着できることをベイカーとコーツ (Coates) が1970年に述べている．ビルー (Bilu) [11] やドヴォルニチヒ (Dvornicich)-ザニエ (Zannier) [15] 等によりこの方面の研究がさらに行われており，マッサー-ヴュストルツのアーベル多様体同種写像についての定理もファルティングスの定理の定量化の1つを与える．しかしながら代数曲線の整数点の存在範囲の完全な一般

[36] (訳注) hyperelliptic 方程式とは $y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ を指す．但し $n \geq 3, a_1, \ldots, a_3$ は3つとも異なる数で，$a_4, \ldots, a_n$ のどれとも等しくならないとする．superelliptic 方程式は $y^2$ のかわりに $y^m$，$m \geq 3$ としたもの．

的評価は種数 2 の代数曲線についてさえまだできていない．

ジーゲルの定理のエフェクティブな証明が与えられている場合については，評価の改良や特別な場合の整数点決定などにおいて，多くの仕事がこの 30 年間になされてきた．全てそこから導かれるであろう．$\alpha$ たちを代数的数，$b$ たちを有理整数，$C(n,d) = 18(n+1)!\,n^{n+1}(32d)^{n+2}\log(2nd)$ としたときに零でない対数 1 次形式

$$\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n$$

に対し下からの評価

$$\log|\Lambda| > -C(n,d)h'(\alpha_1)\ldots h'(\alpha_n)h'(L)$$

を与えるベイカー-ヴュストルツの定理 [6] は，この問題の 1 つの基本的道具となる ( $h'$ は通常のヴェイユの絶対対数的高さを多少修正したもの[37])．これは長い積み重ねで得られた現在最もシャープな評価で，特に重要な応用を念頭において作られており，第 2 節で述べた代数多様体上の零点評価の理論がこの証明に大切な役割を果たした．

他方面でのすぐれた進展としては楕円曲線上でのアナロジーの考察がある．それは楕円対数として通常の対数のかわりに楕円関数の逆写像の値を考えるものである．この進展として平田典子 [21] の結果とその定数部分を完全決定したデイヴィッド (David) [14] の論文があり，$\Lambda$ の評価と同様に実際の応用に用いることが可能になった．例えばストローカー (Stroeker)-タナキス (Tzanakis) [40] はこれより楕円曲線

$$y^2 \;=\; (x+337)(x^2+337^2)$$

の全ての整数点を求めた．またゲーベル (Gebel)，ペトゥー (Pethö)，ツィンマー (Zimmer) [16] は

$$y^2 \;=\; x^3 - 1642032x + 628747920$$

の整数点を決定した．この方法はベイカーの最初のそれとは異なり単数群の

---

37 (訳注)　絶対対数的高さ $h$ とは例えば $a, b$ が互いに素な整数のとき $h(b/a) = \max(\log|a|, \log|b|)$ をみたす関数．定義は [38] 等にある．

データは不要だが，楕円曲線のモーデル-ヴェイユ群の基底の情報が必要なので，計算可能な場合は限られる．しかし基底のわかるときには論法がダイレクトで計算時間もかからない．ここでは初期のベイカー-ダヴェンポート (Davenport) の補題のかわりにドゥ・ヴェーガー (de Weger) らの $3L$-アルゴリズムという効果的な計算方法が用いられてうまくいっている．実際，この分野全体が今や活動の中心であり，ここで使われた技法は疑いなく代数曲線や代数曲面上の整数点の決定に対する一般的な道具となってきている．

さてオイラーの *numeri idonei* 問題を論じよう．オイラーは，1778 年に当時としては大きな素数の構成に関連して[38]，各々の種がただ 1 つの類よりなるような原始的[39]2 元 2 次形式の判別式 $D$ を決定する問題を考え始めた[40]．数値的な実験から，2 次形式のちょうど 101 個の判別式が対応すると予想されていたが，実際は相当する虚 2 次体の 65 個の判別式の存在を示せばよいことがわかる．チャウラ (Chowla) よりそのような判別式が有限個であることは知られており，グロスヴァルド (Grosswald) の結果を使えばディリクレの $L$-関数についての一般リーマン予想の仮定の下で *numeri idonei* 問題が解決される．判別式 $D$ の虚 2 次体のイデアル類群の言葉でこの問題を表せば，$D$ の異なる素因子を $t$ 個とおくとき 1 つの種がただ 1 つの類からなるのは (狭義) 類群が $t-1$ 個の位数 2 の巡回群の直積に同型のときに限る．従って $t=1$ または $t=2$ の場合，*numeri idonei* 問題は類数 1 または 2 の全ての虚 2 次体の決定に帰着され，ベイカーとスタークが 1966 年から 1971 年にかけて解決した．グロス (Gross)-ザギエ (Zagier) [18] の方法で，ゴールドフェルト (Goldfeld) は与えられた類数を持つ全ての虚 2 次体のエフェクティブな決定方法を見つけ，それより任意に $t$ が与えられたときにこの $D$ を完全に決定することが原理的に可能となった．類数 4 つまり $t=3$ の場合，これは実際にアルノ (Arno) によって計算された．

---

38 (訳注) 整数係数 2 元 2 次形式で表される素数は無限個作れる．類体論でも簡単に証明できる．

39 (訳注) 全ての係数の最大公約数が 1.

40 (訳注) 代数的数係数の 2 次形式には種，類という分類があり，1 つの種は有限個の類の合併となることが知られている．整数係数 2 元 2 次形式と 2 次体の判別式は密接に関連し，判別式 $D$ の 2 次体の狭義のイデアル類と判別式 $D$ の整数係数 2 元 2 次形式の同値類が 1 対 1 に対応する．[22], [41] 参照.

ベイカーとシンゼル (Schinzel) [5] は 1971 年に，判別式 $D$ の原始的 2 元 2 次形式のどの種数も，任意の $\epsilon > 0$ に対する $c(\epsilon)|D|^{(3/8)+\epsilon}$ 以下の正整数を表すことを証明した．ここで $c(\epsilon)$ は $\epsilon$ のみによる．さらに彼らは，1 つの類からなる種の 2 次形式の負の判別式 $D$ 全てが $|D| < C(\epsilon)$ をみたすことも示した．この $C(\epsilon)$ は $\epsilon < 1/8$ のとき $c(\epsilon)$ の関数としてエフェクティブに表せる．後にメラー (Möller) [29] がこの関係式を $C(\epsilon) = (2c(\epsilon))^{1/(1/8-\epsilon)}$ と計算した (その後 1/8 を 1/4 と改良したヒース (Heath)-ブラウン (Brown) [19] も参照)．このように $c(\epsilon)$ がエフェクティブに求まるときは *numeri idonei* が解けるといってよい．しかしながらベイカー-シンゼルの結果は $L(1,\chi)$ のジーゲルによるエフェクティブでない評価に依存している[41]．ゴールドフェルト，グロス，ザギエは $L(1,\chi)$ の自明な評価のエフェクティブな改良はしたが，ジーゲルの評価ほど良くはない．将来的に面白く重要な問題がここにある．

もう少しで完全に解けそうな問題といえば，カタランが 1844 年に提出した有名なカタラン予想[42]である．これは $x, y, p, q$ を 2 以上の 4 つの未知の整数としたとき，方程式

$$x^p - y^q = 1$$

は $3^2 - 2^3 = 1$ で与えられる解しか持たない，という問題である (リーベンボイム (Ribenboim) の本 [33] 参照)．$x, y, p, q$ が対数 1 次形式を用いてエフェクティブに決定可能であるという優れた結果をタイデマン (Tijdeman) が 1976 年に出した．実際にはその試すべき解の存在範囲が大きすぎて完全ではないが，この方向に見るべき進展はある．特に $p, q$ は素数として考えてよく，グラス (Glass) らは $\max(p,q) < 10^{18}$，$\min(p,q) < 10^{13}$ であることを示した．さらにミニョット (Mignotte)-ロア (Roy) [27] はインケリ (Inkeri) の仕事を基礎として任意の非自明な $p, q$ が $10^5$ 以上であることを示した．ここでも対数 1 次形式の評価が再びその証明のすきまを埋め，カタラン予想を最終的に解決するかもしれない．

---

[41] (訳注) $c(\epsilon)$ の部分がエフェクティブでない

[42] (訳注) 先の訳注のように，すでにミハイレスクによって完全解決された．対数 1 次形式を用いた証明と，対数 $q$ 次形式を用いない代数的証明の 2 つがある．

もちろん数論には，この他にも大いに意味のある興味深い未到の問題が沢山あることを述べておかねばならない．リーマン予想[43]はもう1世紀以上も解かれていないことを思い出せば十分である．リーマンゼータ関数の零点のない領域の研究についてすらまだ40年くらいこれといった進展がない．超越数論では，最近バレーシリエ (Barré-Sirieix)，ディアズ (Diaz)，グラマン (Gramain)，フィリベール (Philibert) [10] らによりマーラー (Mahler)-マニン (Manin) 予想が解決され，また長い間未解決であった $\pi$ と $e^{\pi}$ の代数的独立性もネステレンコ (Nesterenko) [30] が証明して，新しい未来の領域を開いた．代数的整数論との関連では，シャニュエル (Schanuel) 予想と呼ばれるきわだった未決着の問題があり[44]，その $p$-進化を通して $L$-関数についての非アーベル体でのレオポルト (Leopoldt) 予想が従う (アーベル体の場合はベイカーの結果の $p$-進版より直接出る[45])．代数幾何学に関連するものでは，アーベル積分の周期の代数的独立性についての問題が特に挑戦に値する．新しいミレニアムを勢いよく元気に開くのは数学である，ということがよくわかる．

## 参考文献

[1] Y. André, *G-Functions and Geometry* (Aspects of Math. E**13**, Vieweg, Wiesbaden, 1989).

[2]* T. Apostol, *Modular functions and Dirichlet Series in Number Theory*, (Springer, 1976).

[3] A. Baker, *Transcendental Number Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1st ed., 1975; 3rd ed., Math. Library Series, 1990).

[4] A. Baker, Logarithmic forms and the *abc*-conjecture, *Number theory: Diophantine, computational and algebraic aspects* (de Gruyter, Berlin, 1998), pp. 37–44.

[5] A. Baker and A. Schinzel, On the least integers represented by the genera of binary quadratic forms, *Acta Arith.,* **18** (1971), 137–144.

---

43 (訳注) [20] 参照.

44 (訳注) $x_1, \ldots, x_n$ を有理数体上1次独立な複素数とする．このとき $x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_n)$ のうちの少なくとも $n$ 個は代数的独立．現在も未解決な難予想．$x_1, \ldots, x_n$ が代数的数の場合はリンデマン-ワイエルシュトラスが1885に証明した.

45 (訳注) J. アックス (Ax) と A. ブリュマー (Brumer) による.

[6] A. Baker and G. Wüstholz, Logarithmic forms and group varieties, *J. Reine Angew. Math.,* **442** (1993), 19–62.

[7]* K. M. Ball & T. Rivoal, Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs, *Invent. Math.*, **146**, 1, 193–207, 2001.

[8]* Yu. F. Bilu, Catalan's conjecture (after Mihăilescu), *Séminaire Bourbaki,* Exposé 909, 55ème année (2002–2003).

[9]* N. D. Elkies, ABC implies Mordell, *Int. Math. Res. Notices,* **7** (1991), 99-109.

[10] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain and G. Philibert, Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin, *Invent. Math.,* **124** (1996), 1–9.

[11] Y. Bilu, Effective analysis of integral points on algebraic curves, *Israel J. Math.,* **90** (1995), 235–252.

[12] F. Beukers and J. Wolfart, Algebraic values of hypergeometric functions, *New advances in transcendence theory* (Cambridge University Press, Cambridge, UK 1988), pp. 68–81.

[13] Paula B. Cohen, Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions, *Rocky Mountain J. Math.,* **26** (1996), 987–1001.

[14] S. David, Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques, *Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie, Problèmes diophantiens,* **106**, (1991/92), exposé no. 3.

[15] R. Dvornicich and U. Zannier, Fields containing values of algebraic functions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.,* **21** (1994), 421–443.

[16] J. Gebel, A. Pethö and H.G. Zimmer, Computing integer points on elliptic curves, *Acta Arith.,* **68** (1994), 171–192.

[17]* A. Granville and H. M. Stark, *abc* implies no "Siegel zeros" for *L*-functions of characters with negative discriminant, *Invent. Math.* **139** (2000), no. 3, 509–523.

[18] B. Gross and D. Zagier, Heegner points and derivatives of *L*-series, *Inventiones Math.,* **84** (1986), 225–320.

[19] D. R. Heath-Brown, On a paper by Baker and Schinzel, *Acta Arith.,* **35** (1979), 203–207.

[20]* ヒルベルト『数学の問題』増補版，現代数学の系譜 4，一松信訳・解説，共立出版，1972.

[21] N. Hirata-Kohno, Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, *Invent. Math.,* **104** (1991), 401–433.

[22]* 河田敬義『数論 - 古典数論から類体論へ -』，岩波書店，1992.

[23]* N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer, GTM **58**, Second ed.,1984.

[24]* M. Langevin, Connections between Mason's theorem and the (*abc*) conjecture, Number theory (Ottawa, ON 1996), *CRM Proc. Lecture Notes*, **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 187–213.

[25]* 足立恒雄・三宅克哉『類体論講議』，日本評論社，1998.

[26] D.W. Masser and G. Wüstholz, Isogeny estimates for abelian varieties and finiteness theorems, *Annals Math.,* **137** (1993), 459–472.

[27] M. Mignotte and Y. Roy, Minorations pour l'équation de Catalan, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **324** (1997), 377–380.

[28]* P. Mihăilescu, A class number free criterion for Catalan's conjecture, J. Number Theory **99**, 2003, 225–231.

[29] H. Möller, Imaginär-quadratische Zahlkörper mit einklassigen Geschlechtern, *Acta Arith.,* **30** (1976), 179–186.

[30] Yu. V. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, *Mat. Sb.,* **187** (1996), 65–96.

[31] F. Oort, Canonical liftings and dense sets of CM-points, *Arithmetic geometry* (INDAM, Symposia Math. **37**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994), pp. 228–234.

[32]* P. B. Cohen and G. Wüstholz, Application of the André-Oort Conjecture to Some questions in Transcendence, in *A Panorama of Number Theory* (ed. G. Wüstholz), Cambridge Univ. Press, (2002), 89–106.

[33] P. Ribenboim, *Catalan's conjecture* (Academic Press, San Diego, London 1994).

[34]* T. Rivoal, Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \cdots,$ $\zeta(21)$, *Acta Arith.*, **103**, 2,(2002), 157–167.

[35] N. Schappacher, On the history of Hilbert's twelfth problem: a comedy of errors, *Séminaires et Congrès (Soc. Math. France),* **3** (1998), 243–273.

[36]* T. Schneider, *Einführungn in die transzendenten Zahlen*, Grundlehren **81**, Springer, 1957 (translated in French, Gauthier-Villars, 1959).

[37] H. Shiga and J. Wolfart, Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions, *J. Reine Angew. Math.,* **463** (1995), 1–25.

[38]* J. H. Silverman *The arithmetic of elliptic curves*, GTM **106**, (Springer, 1986).

[39] C. L. Stewart and Kunrui Yu, On the *abc* conjecture, *Math. Ann.,* **291** (1991), 225–230.

[40] R. J. Stroeker and N. Tzanakis, Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms, *Acta Arith.,* **67** (1994), 177–196.

[41]* 高木貞治『初等整数論講議』第 2 版，共立出版株式会社，1971.

[42]* K. Takeuchi, Arithmetic triangle groups, *J. Math. Sco. Japan*, **29** (1977), 91–106.

[43]* A. Wiles, Modular forms, elliptic curves and Fermat's last theorem, *JProceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. **1**, **2** (Zu:rich, 1994), Birkhaüser, Basel, 1995, 243–245.

[44] J. Wolfart, Werte hypergeometrischer Funktionen, *Invent. Math.,* **92** (1988), 187–216.

[45] G. Wüstholz, Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, *Annals Math.,* **129** (1989), 501–517.

[46]* W. Zudilin, One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational, *Russian Math. Surveys*, **56**, 4 (2001),774–776.

[47]* W. Zudilin, Irrationality of values of the Riemann zeta function, *Izvestiya Mathematics*, **66**, 3 (2002), 489–542.

■ 上述の参考文献のうち，番号に $*$ がついたものは訳者が訳注で引用したものである．

# 職業および使命としての数学

## Mathematics as Profession and Vocation

Yu. I. マニン

●訳：砂田 利一（明治大学）



【著者紹介】

**ユリ・イヴァノヴィッチ・マニン** (*Yuri Ivanovich Manin*)

1937年に旧ソ連のシンフェローポリに生まれる.
モスクワ大学にて数学を学び，1960年ステクロフ数学研究所にて博士号取得.
1965年より1991年までモスクワ大学教授．1993年よりマックス・プランク数学研究所の４人の理事のうちの１人.
代数幾何学および数理物理学，特に量子群およびミラー対称性における優れた業績により，1999年スウェーデン王立アカデミーからショック賞を受賞.

## 1

ほかのすべての職業と同様，数学も1つの職業として様々な文脈の下で語ることができる．まずは，最もプライベートな話から始めよう．

10代の始め，私は微積分の教科書を読みながら，精神的な切迫感と興奮の起伏，そして欲求不満をない交ぜにした感情に駆られ始めていた．この教科書は，1935年にルージン(N. N. Lusin)により編集・出版されたロシア語の本であり，友人の家を訪れたときに屋根裏部屋で偶々見つけたものである．そこには，微積分の標準的内容とともに，あの悪名高い $\epsilon$-$\delta$ 論法による連続関数の定義が書かれていた．暑いクリミアの夏，埃っぽい林檎の木の陰に座りながら，私はこの定義としばし格闘していたのである．そうこうするうち，私は腹立ち紛れに林檎の木の根の間に墓を浅く掘り，この本を埋葬してしまった．そして，嫌悪感に駆られながらその場を立ち去った．雨が降り始めたのは，それから1時間ほど後のことだった．私は林檎の木のところに駆け戻って，その哀れな本を墓から掘り出した．結局のところ，私はこの本を好ましく思っている自分自身を発見したのである．

その後すぐに，モスクワ大学では数学が教えられていること，著名な数学者の著作が集められていること(母は，誕生日にヴィノグラドフ(I. M. Vinogradov)の選集をプレゼントしてくれた)，そしてイズヴェスティヤ(ソビエト数学論評)を図書館から借り出して，その中に掲載されている論文は，それが何であってもすべて読もうと試みることができることを知った(等差級数の中に現れる素数についてのリニック(Yu. V. Linnik)の論文をページ一杯に書き写したこともある)．今でもまったく分からないのは，一体全体何故このようなことに没頭することを望んだのかという理由である．しかし，次第にそれが当然のことだと思うようになり，私は数学とともに人生を歩むようになった．

人生の初期の段階で初めて感じた，このような深い個人的関与への思い入れは，多くの人によって共有されるものと思う．また，この思い入れは，血縁，民族，時代のすべての境界を越えて，数学者(音楽家，哲学者，詩人，聖職者...)という共同体の形成と歴史的連続性を保障する主な心理的基盤であると思う．しかし，もし社会と歴史が本人の内的必要性に適合するキャリアを構造的な形で準備しないとすれば，そのような思い入れは異なる方向へ向か

う可能性もある．(半世紀前，膨大なソフトウェア・パッケージを完成するのに努力してしていた人々は，もし彼らのキャリアが保障されなかったとしたら一体どうなっていただろうか？ クヌース(D. Knuth)は 1979 年に，アルゴリズムの語源となったアラビアの数学者アルクワリズミを記念する会議において，このような修辞疑問を呈した.)

人間性そのもの，あるいはその総体意識が，人間の様々な活動についての興奮と欲求不満の引き潮と上げ潮を交互に経験するように思われる．我々数学者は，研究を行い，次世代のための教育を行うさらに大きな科学者共同体の重要な部分をなしている．この共同体は，現代文明の構造基盤を作り，それを維持する産業，医療そしてビジネスと協力関係にある．現代文明は，産業革命により引き継がれた啓蒙運動によって創られた風土の中で形成された．しかし今，その価値観は新時代の失望により崩れつつある(このことについては，少なくともシュペングラー(Oswald Spengler)による指摘まで遡るべきであろう)．科学は，軍事に手助けをし，環境を破壊し，差し迫った災害を前にしても度を越した脳天気振りを発揮している人々に一般的に貢献しているとして，激しく非難されている．

この失望に対して，理性的な反論を行うことは容易である．しかし，そうしたとしても無益な結果に陥ることがあまりに多々ある．維持不能な発展の危険性を誰よりも鋭く感じていた 20 世紀の最も創造的な数学者であるグロタンディック(Alexander Grothendieck)に対して，理性的反論を行うことがどうして可能であろうか.

我々は，木の根っこの下に本を埋め，嫌悪感に駆られながら立ち去るべきなのだろうか？

もちろん，そうすることがよいとは私は思わない．科学は一般に，特に数学がそうなのであるが，我々の文明の起動力というわけではないと私は確信している．確かに，科学は地図と乗り物を供給しはする．しかし行くべきところ，あるいは行くべきではないところを決定することはしない．知識を魔法の形で認識していた昔に戻ってみれば，これは別の見方で納得される．日食や不確実な状況から結果を予言する人は，象徴的な表現を小細工することによって物事を「起こさせる」ペテン師なのである．

現実には，思考の生物学的機能は無意識的行動を刺激することではなく，そ

れを防ぐことなのである．そしておそらく，科学の主要な社会的機能は，現代の社会制度がそうであるように，ポスト産業社会の狂信的行動をくい止めることにあると思われる．

しかし，そうであっても，それは数学と物理学に魅力を感じる人々を突き動かすものではない．この後の数ページを使って，我々の職業の本質について私が何を考えているかについて書こう．

## 2

すべての人類文化の基礎は言語である．そして数学は言語活動の特別な例の１つである．

自然言語は，著しく融通無碍な道具として，生き延びていくのに必要不可欠なものを相互伝達するため，感情を表現し己の意思を押し付けるため，そして誘惑や信念のために使われる．自然言語の頂点にあるのが，豊かな仮想世界を創造する詩と信仰である．

しかし，自然言語は，現代文明で最も特徴的な，増大する自然の理解を己のものとし，組織化し，保持することには決して適しているとは言えない．あの偉大なアリストテレスは，おそらく極限まで言語のこの潜在能力を伸ばそうとした最初の人である．その後，ガリレオ，ケプラー，ニュートンの出現により，科学における自然言語は，天文表，化学式，場の量子論における方程式，ヒトゲノムのデータベースにコード化された現実の科学的知識と，我々の脳との間に介在する高度なレベルの仲介者の役目を任された．科学の教育や研究に自然言語を使うとき，我々の価値観，偏見，詩的イメージ，権力への執着，そしてペテン師の技術など，科学的言説の内容とは真に本質的に異なるものを引きずっている．本質的なものすべては，構造化されたデータの長大なリストによって，あるいは数学によってもたらされるものなのである．そして数学は，データの構造をより適切に記述するためにまず使われ，次に現象の無限の多様性を生成し説明する「自然の法則」について語り得る程度にまで，次第にデータを圧縮していくのである．さらに付け加えれば，内部的発展の過程の中で内的な論理によって促進され，数学も大変複雑かつ内的

に美しい仮想世界を創造する．この複雑さと美しさは，自然言語によってそれらを記述しようとするいかなる試みをもろともせず，何代にも続く世代の中で，数少ないプロフェッショナルの想像力を喚起している．

言語としての数学の最も特別な性格は，インプットされた数学のテキストを用いて形式的ゲームを行うことにより，新知識を含む可能性のあるテキストを結果として得ることができることである．そのような例は，科学あるいは技術的計算により与えられる．しばしば，時間の消費と計算機の助けを借りた仕事の後のみではあるが，基本法則と初期条件が予言を生み出すことになる．陽となりうる知識を既にインプットが陰な形で含んでいると言うこともできる．このことと，聖なるテキストに隠された意味を見出す業(hermeneutics)を較べることによって，人文学との相似性を見出す試みが可能かもしれない．法律の話法も，科学の話法と共通の特徴を持っている．歴史の過程で，科学の現代的言語はこれら 2 つの古典的活動から徐々に出現した．そして，より記述的で非数学的な領域では特にであるが，科学の現代言語はなおこれらに負うところが多いのである．

数学は，物理の世界の意味論的な解釈のような固定した規則を持っているわけではない．同じ波動方程式が，大洋の波，音波，光波，量子力学における確率波を記述するのに使われる．この意味で，数学は隠喩の大きな源泉である．例えば理論物理学における数学的構成の解釈作用は，構成そのものからは分離されるべきである．

多くの数学者は，今なお数学はプラトン主義的な「意味の世界」を扱っていると感じている．この世界では，実数はそのモデルとは独立に存在し，また連続体仮説は真か偽のいずれかである．最近，私は計算機シミュレーションに関する即興的議論に参加した．その主題は，「計算機シミュレーションは理論か実験か？」ということだった．私の答えは，「“本当の実在” の理論であり，かつプラトン主義的な意味での実在における実験である」というものであった．

どんな哲学的な地位をそのような議論に与えることができたとしても，数学の最も美しく発展した部分は明らかにプラトン主義的なものである．そのような対象として私自身の心の中にあるのは，すべての代数的数のなす体と，そのガロア群である．これは数論における中心的対象であり，ゼータ関数，$L$-

関数，保型形式などの解析的道具と関わっている．数論の歴史全体は発明の歴史ではなく，既に存在している世界の探検の歴史のように見える．幾何学の歴史は理論物理学の歴史からほとんど分離できないが，数論は我々の実世界の経験からほとんど何も借りてはいないのである．

## 3

数学と物理学の間では,「物理学者は方程式を発見し，数学者はそれを研究する」という伝統的協力が行われてきており，このような協力関係はもちろんこれからも続くだろう．そして計算機シミュレーションの役割は確実に大きくなっていくだろう．

1970 年代以来，伝統的とは言えない関係が見え始めてきた．観測可能な素粒子のスペクトルと相互作用を満足できる形で記述する「標準モデル」の成功と時を同じくして，物理学者はビッグバンの超高エネルギーに関係するかもしれないかなり空想的なモデルを開発し始めた．これらのモデルの研究は,ほとんどの場合，場の量子論や弦理論に関係しており，複雑な，ときには驚くべき新しい数学を必要としたし，そのような数学の開発に刺激も与えた．この過程は現在フルスィングの状態にあり，物理学者は「第二弦理論革命」について議論している．その内容は，次のような驚くべき発見であるように思われる．これまでに構成され，それらの摂動級数により与えられた量子的弦の基本モデルのすべてが，モデュライ空間の異なった領域における，1 つの同じ理論への漸近的近似でなければならないということである．

数学者は，この挑戦に大きな興味を持ち，関わりを深めつつある．私には,これは最近 10 年間の，数学における最も重要な傾向に思われる．この傾向は 21 世紀に引き継がれていくことになることだろう．

数学は，大雑把に言えば問題を解くことを主な活動とする．あるいは，数学は概括的に定義されたプログラムの発展として説明される．これらの 2 つの様相は相補的なものである．20 世紀の数学は，ヒルベルトの 23 の問題を出発点にしていて，それらの解決は歴史的ランドマークであった．しかし，20 世紀という時代の業績は，位相幾何学，数理論理学そしてコンピュータを生

み出したことにあると言っていいと思う．

あるときは，実行に移されるには早すぎる新興の研究プログラムもある．このようなときは，それは予想(例えばヴェイユ予想)，あるいはヴィジョン(グロタンディックのモチーフ，ラングランズ・プログラムの初期的段階)として定式化される．

私の意見では,「古典数学の量子化」に関する新興プログラムについて，今語ることができると思う．これは，弦の量子論を理解するために必要な物理学者との単なる協力を超えて，さらに広い視野を持つプログラムなのである．このプログラムが既に成果を挙げ，予見可能な未来において積極的に追求されるであろう分野について簡潔に説明しよう．

1) **位相幾何学**　物理学者の得意とする経路積分の定式化による発見的方法は，結び目と 3 次元及び 4 次元多様体の新しい不変量の発見，解釈，そしてより深い理解を導いた．シンプレクティック位相幾何においては，アーノルド予想の解決へつながった．

2) **代数幾何学**　同じ定式化だが異なった文脈で応用されることにより，安定曲線のモデュライ空間及び代数多様体への安定写像のモデュライ空間に対する数値的不変量を係数とする母関数が，注目すべき微分方程式を満たすことが発見された．例として，量子コホモロジーの理論，ミラー対称性，特異点理論との関係などがある．

3) **微分幾何学**　ツイスター・プログラムは，幾何学の新しい章を開き，$\mathbf{R}^4$ の非標準的可微分構造の発展，ホロノミー群の最終的分類へとつながった．2 次元共形場理論(CFT)は，例えばフロベニウス多様体のように今や豊かな理論を有し，量子コホモロジーの数学的基礎付けを与える新しい幾何構造の定式化を導いた．

4) **代数学**　オペラッド(operad)の理論の復活が CFT により刺激されたが，これは一般代数系への「逆流現象」における最近の重要な出来事のように見える．もっと具体的な対象の中で，最も興味深い対象は頂点作用素代数である．これも，よりよく理解された CFT の部分を形作っている．この代数の表現論，ムーンシャイン予想の証明，そして(一般化された)カッツ-ムーディ

代数との関係が，最近 10 年間の最も興味ある代数学の発展に属している．

5)**非可換幾何学と超幾何学**　可換と非可換な座標を含む超幾何学は，ボソンとフェルミオンの量子論を古典近似しようとした物理学者によって発見された．流行しているとは言えなくても，それは今では標準的知識となっている．また，これは古典的な数学における基本的幾何学(可微分，解析的，代数的)をすべて拡張したものになっている．特に重要なのは，超対称性の理論とキリング-カルタンの分類理論の拡張である．アラン・コンヌ(Alain Connes)による非可換幾何学は様々な源泉を持ち，その 1 つは量子論である．それは標準モデルに応用を見出し，ゼータ関数のスペクトル表現の問題にも応用できることが最近分かった．

6)**量子コンピュータ**　これは，ここで考えるのに相応しい，新しくしかも魅力的なアイディアである．何故なら，現段階においてそれは純粋に理論的な提案であり，もし可能であるのなら，それをハードウェアで実装するには新しい技術を必要としているからである．それは，古典的なレジスターの代わりに「量子 $n$-ビットレジスター」というものを使うことを示唆している．これは量子状態が $2^n$-次元ヒルベルト空間をなすようなデバイスである．従って，量子空間の体積は $n$ とともに二重指数増大する．さらに付け加えれば，量子発展法則は，基本操作として $2^n \times 2^n$-行列の乗法を提供する．最近，量子レジスターを使うことによって，高速因数分解の問題を解くことができることが示された．この解法は，現在最も広く使われている公開鍵暗号が破られることを意味している．その基本的なアイディアは，(効率的なアルゴリズムが未知のとき，古典的計算を加速させるための主要な方法である)並列計算を，大規模量子並列計算により置き換えることである．量子並列計算の理論的可能性は，重ね合わせの原理に依存している．この方向は，来るべきホットな話題に必ずなるであろう．

## 4

しかし，これらはすべて知性を要求する事柄である．数学者の実際の生活についてはどうなのか？

私は火曜日と木曜日に授業がある(他の選択肢もあるのだが，私はとにかく「月-水-金-人間」ではない)．それも，できる限り午後に，少なくとも早朝ではない時間に授業を持つようにしている．早朝は多くの数学者にとっては地獄なのである．もちろん，このような過酷でない時間割にするためには戦いが必要である．

講義室はチョークの臭いで満ちている．黒板は既に何度も使われていて，数え切れないほど消され，くたびれているように見える．

チョークの臭いは，モスクワ，ケンブリッジ，マサチューセッツ，東京，ボン，パリ VI，パリ VII，どこでも同じである．ここで，最後の 2 つは都市ではなく大学の名前である．もちろん，モスクワ，東京，ケンブリッジ，マサチューセッツは大学以上のものである．数学は貴方を世界中に送るが，貴方が行く場所は，何故かどこでも似たように見える．

学生は,「やっかいな」ものでありうる．しかし 40 年の教育経験から，学生が貴方の人生で最も大事なものであることを見出すだろう．貴方が多分歳をとるだけの間に学生は賢くなり，結婚をし，再婚して彼らの子供と家の写真を送ってくるだろう．また，もしかしたら貴方に推薦状と評価の手紙を頼むこともある．貴方のコンピュータはそのためのファイルで一杯になる．そして時折，彼らが素晴らしい定理を証明したり，貴方が夢にも見たこともないような洞察を与えて，貴方を気絶させたりプライドで満ちあふれさせるようなこともありうる．

これはキャリアというべきものだろうか？ まあ，yes と言ってもよいだろう．期限付きでない教授職がより上級の段階であるような，上流に向かう動きがある．仕事は貴方と家族の生活を保障する．しかし多分，人生をそれに捧げるための確信に満ちた議論が必要であろう．

そこで，さよならを言う前に，もっと知性を要求するものを述べることにしよう．

## 5

ダーウィンの理論による進化は，生物にとって極めて不経済なものである．この進化では，個体群の遺伝子プールは環境条件の変化とは無関係なランダムな突然変異に従属している．そして，自然選択は，次世代に最も効果的に伝わっていく遺伝子的変種を好む．より適切な生物体は，より多くの子孫を生み，遺伝子を次から次へと伝えていく．残りの不適切な変種は一掃されることになる．

ラマルクによる獲得形質の遺伝はずっと効率的である．貴方は器官や能力を使い，それを補強する．すると貴方の子供は，貴方が遭遇した困難を乗り越えるのに既に適応した形で生まれる．

我々は今，自然が何故ラマルクの理論よりもダーウィンの理論を選ぶのか，その理由をよく理解している．遺伝子の中にコード化された情報は，環境からは十分に孤立しており，そしてしている必要があるからである．それは，途方もなく複雑な発達のプログラムのテキストであり，外部からの改竄に抵抗しなければならない．さもなければ，我々は次のようなメカニズムを必要とすることになるだろう．すなわち，これによって，例えば地球温暖化のような粗野な環境変化が，無毛のねずみという新世代を生み出すのに必要となる遺伝子の微妙な化学的削除と交換の中に意味のあるコードとして取り込まれるようなメカニズムである．実際のところ，このような決定論的メカニズムは知られていない．その代わりに，自然は遺伝子的指令のランダムな変化を生じさせ，以前は成長する前に凍死してしまった無毛のねずみは，(地球温暖化により)過熱してしまった有毛の仲間を数の上で圧倒することになる．

この推論は，奇妙な疑問を引き起こす．子孫に獲得形質を伝える能力は，結局は生物種の全体的デザインの一部分として考えることができる．我々はそのような種を知らないのであるが，しかし，もしこの能力が適応を好むとすれば，飛行能力や色彩を感ずる能力がそうだったと思われるように，何故この能力がランダムな突然変異の列から進化しないのだろうか？ 換言すれば，ラマルクの進化は，何故ダーウィンの進化の後半の段階に成りえないのだろうか？

これが，組織体の異なったレベルにおいてのみ，人類にまさしく起こった

ことであると主張することは可能である．人類の生物学的進化は，過去のある時代に停止した．そして文化的進化は，ラマルクにより述べられた道を辿り始めている．

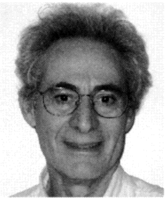
言語は文化の遺伝子的プールを形作る手段を提供している．それは，最初は口に出す言葉を通して，次に書かれたテキストを通して発展し伝達される．後に続く世代の経験は，叙事詩と計算機プログラムに直接コード化され，これらはさらに人類が受けた状態の変化を次世代に伝えるために使われるのである．

# $p$進変動の主題

## The Theme of $p$-adic Variation

B. メイザー

●訳：梶原 健（東北大学）



【著者紹介】

**バリー・メイザー** (*Barry Mazur*)

1937年ニューヨークに生まれる.
1959年プリンストン大学にて博士号を取得.
1962年ハーバード大学助手，1965年同大学助教授を経て，
1969年同大学教授となり，現在にいたる.
その研究対象はトポロジーから力学系，代数幾何学へと変化し，
近年は数論に最も関心をもっている.
アメリカ数学会よりヴェブレン賞(1966)，コール賞(1982)，
スティール賞(1999)を受賞.

この1世紀の間，数学者は，素数2, 3, 5, ... に（“無限素数” という）仲間がいることに気付いていた．有限素数とこの無限素数との間の類似の追求により，数学における類似の位置付けに関するアンドレ・ヴェイユの有名な瞑想[1] の中で彼が暗示したような果実が実った．彼の瞑想からの引用句はこう始まる：

“数学者はみな知っていることだが，漠然とした類似，一理論から他の理論に映し出された不鮮明な像，密かな愛撫，説明し難い不一致より豊穣なものはない．このことより大きな喜びを研究者に与えるものも他にない．”

素晴らしい類似は我々をその探究に駆り立てるが，しかし，そのような類似は我々のすぐ目の前にありながら未だ理解できない．ときどき我々は，あるとらえどころのない類似を真に理解した，とか，ほとんど理解した，と言って自分自身を励ますのである．私はこれまでに，講演者が自分は有限素数と無限素数を “同等の立場で” 扱っていると言うのを聞いてきた．もちろん，関数体と代数体の類似がクロネッカー，ウェーバー，ヒルベルト，アルティンによって定式化されて以来，数論学者は大域体[2]の無限素数と有限素数を “同等の立場で” 扱おうと試みてきており，いくらか成功した．しかし，アルキメデス的現象と非アルキメデス的現象は根本的に不可解なほど異なっている[3]．おそらく次の世紀にはこれらの関係がより深く理解されるであろう．もしそうならば，私の予言はこうである：そのような理解は真に栄光あるものであり，その精神はヴェイユの瞑想から悲しく続く引用句で決してとらえることはできないであろう．

“この幻想が消える日が来る：予感が確信に変わる．酷似した理論は消滅す

---

1 (訳注) “De la métaphysique aux mathématiques”（形而上学から数学へ），ヴェイユ全集 [1960a].

2 (訳注) 大域体とは素体（有理数体や素数位数の有限体）上有限生成な体のこと．例えば，有理数体や有限体上の1変数有理関数体は大域体の例である．

3 (訳注) 無限素数（あるいは無限素点）に関係することをアルキメデス的，有限素数（あるいは有限素点）に関係することを非アルキメデス的とも言う．ここで素点とはある観点から見た素数のこと．

るまえに共通の源を明らかにする．ギーター[4]が説くように，人々は知識を得ると同時に関心を失う．形而上学は数学になり，論文の題材となり，その冷めた美は我々を感動させる力を失ってしまった．”

例えば我々が代数体上の代数多様体の(コホモロジー群，例えば $H = H^n$ に付随する) $L$ 関数を扱うとき，アルキメデス的なものと非アルキメデス的なものとの悩ましい違いに，2 つの “直交する” 仕方でぶつかる：

- 1 変数 $s$ の複素解析関数である $L$ 関数はしばしば半平面上で，オイラー因子 $L_v$ の無限積として表示される．このとき経験からわかるように，非アルキメデス的素点とアルキメデス的素点の両方の，すべての素点に対するオイラー因子を含んだ “修正” 版の $L$ 関数

$$L = \Big(\prod_{v\ \text{非アルキメデス的}} L_v\Big) \times \Big(\prod_{v\ \text{アルキメデス的}} L_v\Big)$$

を特に研究する必要がある．これらの中で最も有名なものは，変数変換 $s \mapsto 1-s$ で不変な “修正版” リーマンゼータ関数

$$\zeta^*(s) = \zeta(s)\cdot\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

である．ここで有限素数 $p$ でのオイラー因子は $(1-p^{-s})^{-1}$ であり，無限素数でのオイラー因子は $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ である．ここでの難問は，そのようなアルキメデス的な $L_v$ と非アルキメデス的な $L_v$ を 1 つの枠組に取り込む方法である．このことに対する 1 つの有望なアプローチは，正規化された行列式に関連したデニンガー (Deninger) のものである [D].

- しかし，これらの $L$ 関数の “値” の側に関する，もう 1 つの難問がある．岩澤健吉とレオポルト (Leopoldt)-久保田の研究以来ずっと標準に

[4] (訳注) バガヴァッド・ギーター (Bhagavad Gita) (神の歌)．インドの叙事詩「マハーバーラタ」の第 6 巻目に収められている．ギーターは，困惑する勇者アルジュナにクリシュナ神のメッセージを説くものである．

なっていることは，複素解析的 $L$ 関数だけでなく，すべての素数 $p$ に対して両立する，モチーフあるいは保型形式に付随する $p$ 進解析的 $L$ 関数を探すことである．一方で，これらの“両立する”$L$ 関数の族のどれもが，ある本質的な見地から，族全体があたかも“すべて同じ関数”のようにふるまう(それどころか実際には，それらは時折たった 1 つの古典的 $L$ 関数の値を補間して構成される)．他方で，基本的な数論的情報やある下部構造[5]において重大な違いがあり，それが非アルキメデス的値をもつ $L$ 関数をアルキメデス的値をもつ $L$ 関数と区別しているように思われる．

非アルキメデス的な値をもつ $L$ 関数の研究にときどき利用できる 1 つの特別な手掛りは次の事実から来る．その $L$ 関数を伴うモチーフがそれ自身，ある意味で $p$ 進的に補間する“モチーフの族”の一員となり，その族の一員に付随した $L$ 関数が補間され，$p$ 進解析的に変化する $L$ 関数の族になる．この論説の主要な点は，$p$ 進補間と $p$ 進変動の概念を説明し，アルキメデス的な世界で何らかの類似した“変動理論”があるかどうか，を問うことである．

$p$ 進理論における“変動”の例として，$SL_2(\mathbf{Z})$ に関する整数重み $k = 4, 6, \ldots$ で離散的にパラメータ表示される古典的アイゼンシュタイン(Eisenstein)級数[6]の族

$$E_k(q) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!\,\zeta(k)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i z}$$

をまず考える．ここで $\sigma_{k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{k-1}$ である．

これらのアイゼンシュタイン級数をある比較的簡単な手続きで修正して，すべての素数 $p$ に対して $\Gamma_0(p)$ に関する固有形式(eigenform)である[7]アイゼンシュタイン級数

$$E_k(q) = 1 + (\text{定数}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^*_{k-1}(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i z}$$

---

[5] (訳注) underlying structure の訳．

[6] (訳注) 重み $k$ のアイゼンシュタイン級数 $E_k(q)$ は上半平面 $\{z \in \mathbf{C}; z \text{ の虚部} > 0\}$ 上の正則関数で，$SL_2(\mathbf{Z})$ の元に関するある変換公式をみたす．モジュラー形式等に関しては，例えば土井公二，三宅敏恒著，保型形式と整数論，紀伊國屋数学叢書 7, 紀伊國屋書店を見よ．

[7] (訳注) $\Gamma_0(p)$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ の部分群 $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z}); c \bmod p = 0\}$ のこと．

を作ることができる．ここで $\sigma^*_{k-1}(n) := \sum_{d|n,(d,p)=1} d^{k-1}$ であり，“定数” は $k$ に依存する．この “修正” は以下で議論する **p 精密化**と呼ばれる手続きの例である．セール(Serre)が気付いていたことだが，これらの修正されたアイゼンシュタイン級数は $p$ 進的に補間され，$\mathbf{C}_p^*$ に値をもつ[8]

$$\varprojlim(\mathbf{Z}/(p-1)p^\nu\mathbf{Z})^* = (\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z})^* \times \mathbf{Z}_p^*$$

上の連続指標 $\kappa$ に依存する $p$ 進モジュラー形式の族を作る．$n \geq 1$ に対して

$$\sigma^*_\kappa(n) := \sum_{d|n,(d,p)=1} \kappa(d)d^{-1}$$

とおくと，その補間された $p$ 進的な族はフーリエ展開

$$E_\kappa(q) = 1 + \frac{2}{\zeta^*_{(p)}(\kappa)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^*_\kappa(n)q^n$$

をもつ．ここで $\zeta^*_{(p)}(\kappa)$ は(久保田-レオポルト)$p$ 進 $\zeta$ 関数

$$\zeta^*_{(p)}(\kappa) = L_p(\chi, 1-s)$$

であり，$\kappa = (\chi, s)$ は [C] の B1 節にある記号である．

古典的アイゼンシュタイン級数の離散的な族はまた，従来のように補間されて複素解析的な重みでパラメータ表示された族になるので([B] を見よ)，平行した議論で始めるとうまく行くように思われる．しかしながら，この平行した議論を続ける方法は我々をとても混乱させる．

(上で例示したようなモジュラー固有形式(modular eigenform)の)$p$ 進変動理論の 1 つの特徴は，変動するモジュラー固有形式の $L$ 関数や他の数論的不変量の $p$ 進変動理論と密接に関係している(そして，これらを伴うことが予想あるいは証明できる)点である．

今述べたすべてのことの(それほど技術的ではない)ヒントを与えるために，“抽象” 群の有限次元複素表現に関する類似の変動理論や，それに伴うホモロジーの変動理論を初めに述べることにより，このことを見ていくことにしよう．おそらく断るべきことだが，物事ができるだけ簡単に見えるように，こ

[8] (訳注) $\mathbf{C}_p^* := \mathbf{C}_p \setminus \{0\}$．$\mathbf{C}_p$ は $p$ 進体 $\mathbf{Q}_p$ の代数的閉包の $p$ 進完備化を表す(2 節参照)．

の論説では(従来用いられる**コホモロジー**よりはむしろ)**ホモロジー**で考えることにした．変動理論において，もし物事をコホモロジー的に記述しようとすると，非常に多くの "Ext" 群が紙面に明示的に現れることだろう．もちろんホモロジーでも同じ数の "Tor" 群が紙面に陰に現れるけれども．

私はこの論説の話題に関する示唆，啓発的な意見や会話に対して，A. ベイリンソン(Beilinson), K. ブザード(Buzzard), B. コンラッド(Conrad), C. デニンガー, F. ダイアモンド(Diamond), R. グリーンバーグ(Greenberg), D. カジダン(Kazhdan), C. マクマレン(McMullen), S. ノヴィコフ(Novikov), H. ランダウ(Landau), R. オッセルマン(Osserman)に感謝します．初期の草稿では詳細なご意見をいただき M. エマートン(Emerton)にお世話になりました．

## 1. 群の表現の複素変動の "ホモロジー代数"

$M$ をパラコンパクト複素解析多様体とする．ここで $M$ が(可算)無限個の(連結)成分をもつ可能性を許す．$G$ を(抽象)群，$V$ を有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_M$ 加群とする[9]．群 $G$ の表現

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_M}(V),$$

すなわち $G$ の $V$ への複素解析的な $\mathcal{O}_M$ 線型な作用が与えられているとする．$(M, V, \rho)$ を ***G* 表現の複素解析的変動**と呼ぼう．これらの研究については [L-M] を見よ．$\mathcal{O}_M[G]$ 表現 $\rho$ が "わかっている" ならば，しばしば $(M, V, \rho)$ を単に $(M, V)$ と書き，$V$ は $\mathcal{O}_M[G]$ 表現 $\rho$ の付いた連接 $\mathcal{O}_M$ 加群を表すと考えよう．複素解析多様体の正則写像 $f\colon M' \to M$ が与えられたとき，$f$ による引き戻しで得られる $(M', V', \rho')$ (すなわち $V' = f^*V$, $\rho'$ は $\rho$ によって誘導される $V'$ への $G$ の作用を表す)を，$f$ による**底変換**で $(M, V, \rho)$ から得られる $G$ 表現の複素解析的変動と呼ぶ．$G$ 加群 $V$ のホモロジー群を考えよ．これらは $\mathcal{O}_M$ 加群の "解析的" 層であり，

[9] (訳注) $\mathcal{O}_M$ は $M$ 上の正則関数からなる層を表す．位相空間上の層や環付き空間(=位相空間とその上の環の層の組)については例えば，永田雅宜，宮西正宜，丸山正樹著「復刊 抽象代数幾何学」(共立出版) の 1.1, 1.2 節参照．

$$\mathcal{H}_\bullet(G,V) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_n(G,V)$$

と書く．複素解析多様体上の解析的層の議論は [G-F] の IV 章，定義 2.5 とその周辺のページを見よ．鎖複体による $\mathbf{Z}[G]$ 加群 $\mathbb{Z}$ の標準自由分解([Se] VII 章 3 節参照) $C_\bullet(G)$ を使って，$\mathcal{O}_M$ 加群(の解析的層)の複体

$$V_\bullet := C_\bullet(G) \otimes_{\mathbf{Z}[G]} V$$

のホモロジーとして，$\mathcal{O}_M$ 加群の解析的層 $\mathcal{H}_n(G,V)$ が計算できる．

$\mathcal{O}_M$ 加群 $\mathcal{H}_n(G,V)$ の構成は任意の**平坦**底変換 $f: M' \to M$ と可換である．また $\mathcal{H}_0(G,V)$ が消える(これは，すべての点 $m \in M$ に対して，$m$ のファイバー $V_m$ の $G$ 余不変(coinvariant)商[10]が消えることと同値)ような特別な場合では，**1 次元**ホモロジー $\mathcal{O}_M$ 加群 $\mathcal{H}_1(G,V)$ の構成は任意の底変換と可換である．このことを確かめるには，キュネス(Künneth)の定理，もしくは普遍係数定理の古典的証明([Mac] の第 V 章 10 節，11 節参照)をこの状況で繰り返せばよい．今後 $\mathcal{H}_1(G,V)$ だけに焦点を当てよう．もし $M$ が滑らかならば，ここではそうだが(より一般に，構造層のすべての局所環が UFD[11]ならば)，任意のねじれ連接 $\mathcal{O}_M$ 加群の層 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}$ のフィッティングイデアルの因子的部分を与える $M$ 上の**随伴カルティエ因子**を付随させるのが伝統的なやり方である．これを $Z(\mathcal{F})$ と呼ぼう．しかし，この複素解析的状況では，得られた "カルティエ因子" について一言いうべきである．滑らかな複素解析多様体 $M$ 上の有効なカルティエ因子は，$M$ 上局所的に，$M$ の構造層の 0 でないある局所切断の零点集合として切り取られたものである．このようにして十分小さい任意の局所座標系では，そのカルティエ因子は有限個の余次元 1 の既約閉部分多様体の非負整数係数の和で表すことができる．しかし，$M$ 上大域的には，明らかな意味で "局所有限な" (非負係数の)可算無限個になり得る和

$$Z(\mathcal{F}) = \sum_j e_j \cdot Z_j$$

として表され得ることを覚悟しなければいけない．後に議論するモチーフの

---

[10] (訳注) $V/\langle gv - v; g \in G, v \in V\rangle$.

[11] (訳注) Unique Factorization Domain (一意分解整域)の標準的な略.

状況では，これはとても重要になるだろう．

$(M, V, \rho)$ から得られた $G$ 表現の複素解析的変動に戻って，$\mathcal{H}_0(G, V)$ が消えること(簡単のためだけに)と，$\mathcal{H}_1(G, V)$ がねじれ連接 $\mathcal{O}_M$ 加群であること(これはより本質的である)を仮定しよう．$\mathcal{H}_1(G, V)$ に伴うカルティエ因子を $Z(\mathcal{H}_1(G, V))$ ($=Z(M, V)$ と略す)と書く．より明示的に述べると，カルティエ因子 $Z(M, V)$ を既約多様体 $Y_j$ の正係数線型結合として $Z(M, V) = \sum_j e_j \cdot Y_j$ と書けば，$Y_j$ ($j = 1, \cdots$) はちょうど加群 $\mathcal{H}_1(G, V)$ の台(support)の余次元 1 の既約成分全体であり，その重複度 $e_j$ は

$$e_j = \dim_{k_j} \mathcal{H}_1(G, V) \otimes_{\mathcal{O}_M} k_j$$

で与えられる．ここで $k_j$ は既約解析多様体 $Y_j$ 上の有理型関数全体のなす体である．

その極がカルティエ因子 $Z(M, V)$ でおさえられる有理型関数のなす直線束 $\Lambda(M, V) := \mathcal{O}_M(Z(M, V))$ を定義し，$\Lambda(M, V)$ の大域切断として定数関数 1 を $L(M, V)$ と表すことによりこの情報を同等にうまくまとめることができる．このとき，その切断 $L$ の零点集合がカルティエ因子 $Z(M, V)$ である．まさにこのようにして我々の構造をまとめることは役に立つであろう．なぜならば，この論説で後に議論する数論的状況を見越して考えることになるからである．そこで特別な直線束 $\Lambda$ とその切断 $L$ の**独立した構成**をしばしば手にする．ときには，その直線束 $\Lambda$ を自明化することが可能であり，すると我々の切断が $M$ 上の具体的な剛解析的(rigid analytic)関数("$L$ 関数の候補")になる[12]．この自明化は，例えばモジュラー形式の $p$ 進 $L$ 関数の構成の場合に，適当な "$p$ 進周期" を選ぶことによって行われる．このとき重要な研究は，この $L$ 関数(の候補)の零点集合が数論的考察から定義された特別な有効なカルティエ因子 $Z$ を切り取ることを証明しようとすることである．このタイプの問題は伝統的に，$p$ 進 $L$ 関数の理論において，"主予想" というタイトルで知られていて，多くの状況で，今日でさえ，まさにその名のとおりである．つまり今なお予想である．より一層，的を得て言えば，ある数論的状況では(例えば，有限な正の傾きをもつ過収束 $p$ 進固有形式(overconvergent

[12] (訳注) 剛解析理論(rigid analytic theory)は複素解析理論(アルキメデス的解析理論)の非アルキメデス版に当たる．

$p$-adic eigenform)に対しては)，“解析的” 理論が “数論的” 理論よりいくらか早く進んでいて，ある $L$ 関数はその $L$ の零点集合に対応する $\mathcal{H}_1$ の定義を待っているのである．

こういうことをすべて見込んで，上記の切断 $L(M,V)$ が存在するとき，それを $G$ 表現 $(M,V)$ の複素解析的変動の $L$ 切断(あるいは $L$ 関数)と呼ぼう．$\{\Lambda(M,V),L(M,V)\}$ の構成は(構成できるとき)平坦底変換で保たれる．さらに，その構成は次の意味で表現 $V$ に関して “加法的” である．自然な同型 $\Lambda(M,V_1\oplus V_2)\cong\Lambda(M,V_1)\otimes\Lambda(M,V_2)$ が存在して，その同型に関して $L(M,V_1\oplus V_2)=L(M,V_1)\otimes L(M,V_2)$ (もちろん，これらがすべて定義されているとき)である．

我々は複素解析的な圏で考えることを公的に選んだので，我々の $Z$ は $M$ 上の複素解析的カルティィエ因子である．しかし，もし底空間 $M$ と表現 $\rho$ を体上の滑らかな代数多様体または正則概型[13]の圏の中に取れば，類似の条件のもと，$Z(M,V)$ はその場合でも定義され，代数的な意味で $M$ 上のカルティィエ因子であろう．

**例**　有限単体複体であるアイレンベルグ-マックレイン(Eilenberg-Maclane)空間 $K(G,1)$ が存在するとき，適当な導来圏において複体 $V_\bullet$ は有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_M$ 加群の有界な複体 $V_\bullet^\flat$ と擬同型である．これに関する 1 つの良い例は $G$ が結び目群のときである[14]．結び目群の状況で最も有名な $M$ と $V$ の例は，$G$ のすべての次数 1 の複素表現の普遍空間によって与えられる．$M^{(1)}$ を次数 1 の $G$ の $\mathbf{C}$ 表現の普遍モジュライ空間にとれ．結び目 $K\subset S^3$ に向きを与えよ．このとき左ねじの法則が無限巡回群 $G^{\mathrm{ab}}$ の標準的な生成元を決定する[15]．この標準的な生成元の持ち上げ $\Phi\in G$ を 1 つ固定せよ．複素解

---

[13] (訳注) 概型(scheme)とは代数多様体を可換環に一般化した空間概念である．例えば整数環は 1 次元正則概型と考えることができる(アフィン概型の訳注参照)．詳しくは代数幾何の教科書参照．

[14] (訳注) 素数と結び目の類似をメイザー(Mazur)他，Yu. I. マニン(Manin)，森下昌紀，M. カプラノフ(Kapranov)らが指摘している．例えば，森下昌紀，素数と結び目—代数的整数論と 3 次元トポロジーの類似について—，第 47 回 代数学シンポジウム報告集，pp. 157–171.

[15] (訳注) 左ねじの進む向きが結び目の向きに一致するように(すなわち反時計回りに)結び目を 1 周する閉曲線が $G^{\mathrm{ab}}$ の生成元を与えるということ．ここで $G^{\mathrm{ab}}$ とは，$G$ を $ghg^{-1}h^{-1}$

析多様体 $M^{(1)}$ は標準的に $\mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbf{C}^*)$ である．また $h \in \mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbf{C}^*)$ に対して $z(h) = h(\Phi)$ と定義すると，対応 $h \mapsto z(h)$ により，$M^{(1)}$ は $\mathbf{C}^*$ と同一視できる．$M^{(1)} = \mathbf{C}^*$ 上の次数 1 の普遍 $G$ 表現

$$\rho^{(1)} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{M^{(1)}}}(V^{(1)})$$

は次のように与えられる：台となるベクトル束(これを $V^{(1)}$ と書く)は単に $M^{(1)}$ 上の自明な直線束 $\mathcal{O}_{M^{(1)}}$ であり，$\zeta \in \mathbf{C}^* = M^{(1)}$ に対して，$V^{(1)}$ の $\zeta$ でのファイバー $V^{(1)}_\zeta$ 上の $G$ の表現 $\rho_\zeta$ は，$\rho_\zeta(\Phi)$ が $\zeta$ 倍で作用するという条件で特徴付けられる．

(アフィン)概型[16]の圏で考えると，この階数 1 の表現の普遍変動 $(M^{(1)}, V^{(1)})$ は次のように記述すると便利である．$\mathbf{C}[\mathbf{Z}]$ を複素係数の $\mathbf{Z}$ の群環とする．この群環 $\mathbf{C}[\mathbf{Z}] \cong \mathbf{C}[z, z^{-1}]$ を変数 $z$ の複素係数ローラン多項式環と考える(同型は $\sum c_n[n] \mapsto \sum c_n z^n$ で与えられる)．$\mathbf{M}^{(1)} := \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[\mathbf{Z}])$ とすると，$\mathbf{M}^{(1)}$ は標準的に "乗法群概型"，すなわち $\mathbf{C}$ 上の $\mathbf{G}_m$ と同型である．($\mathbf{V}^{(1)}$ を階数 1 の自由 $\mathcal{O}_{\mathbf{M}^{(1)}}$ 加群と見て) $\mathbf{V}^{(1)} := \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{(1)}}$ とおく．

$$\mathbf{C}[\mathbf{Z}]^* = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbf{M}^{(1)}}} \mathbf{V}^{(1)}$$

という同一視のもと，準同型の合成

$$G \to G^{\mathrm{ab}} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C}[\mathbf{Z}]^*$$

によって，$G$ を $\mathbf{V}^{(1)}$ に $\mathcal{O}_{\mathbf{M}^{(1)}}$ 線型に作用させる．このとき $(M^{(1)}, V^{(1)})$ は単に，$G$ 表現の代数的変動 $(\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)})$ の台となる $G$ 表現の複素解析的変動である．

これらの構成がどのように表現を測るかをみる演習問題として，生成元 $1 \in \mathbf{Z}$ を正則線型変換 $T : \Omega \to \Omega$ によって作用させることにより，$G^{\mathrm{ab}} = \mathbf{Z}$ を有限次元複素ベクトル空間 $\Omega$ に作用させよう．パラメータ空間 $M^{(1)}$ 上で誘導された $G$ 表現の複素解析的変動 $\Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)}$ を考える．ここで $G$ はその商群 $G^{\mathrm{ab}}$ を経由してテンソル積 $\Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)}$ に対角的に作用する．$M^{(1)}$ 上の

---

$(g, h \in G)$ の形の元を含む最小の $G$ の正規部分群で割った商群のことである．

16 (訳注) アフィン代数多様体を一般化した，可換環が定義する空間(集合として可換環の素イデアルからなる)のこと．可換環 $R$ に対して $\mathrm{Spec}(R)$ と書く．

連接層の完全系列

$$\Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)} \xrightarrow{zT-1} \Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)} \to \mathcal{H}_0(G, \Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)}) \to 0$$

を用いて $\mathcal{H}_0(G, \Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)})$ を計算しよう．したがって $\mathcal{H}_0(G, \Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)})$ は行列 $T$ の固有値の逆元であるような $M^{(1)} = \mathbf{C}^*$ の点で台をもつ．(層 $\mathcal{H}_0(G^{\mathrm{ab}}, \Omega \otimes_{\mathbf{C}} V^{(1)})$ は $G$ 余不変な元による構成だから，当然)与えられた点 $z \in M^{(1)}$ での重複度は $T$ の固有値 $z^{-1}$ の独立な(一般固有ベクトルでなく，真の)固有ベクトルの数であることに注意せよ．(関係する表現が半単純でない，あるいは半単純かどうかわからないとき)この現象，そして $\mathcal{H}_1$ を計算するときの類似した現象にも特別な注意を払うべきである．

$\mathcal{O}_{\mathbf{M}^{(1)}}$ 加群 $\mathcal{H}_1(G, \mathbf{V}^{(1)})$ はねじれ加群であることが証明でき，カルティエ因子 $Z(\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)})$ は，$\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{C}^*$ 上の(有限かつ有効な)0 次元サイクルであり，ゆえに $z$ のべきによる積を除いて一意的にローラン多項式 $A(z) \in \mathbf{C}[z, z^{-1}]$ によって表現される．ここで $z$ は穴空き複素平面 $\mathbf{C}^*$ の標準的な一意化変数である．明らかに $A(z)$ は(向き付けられた)結び目群 $G$ の不変量である．演習問題として，多項式 $A(z)$ と $\mathcal{K}$ のアレクサンダー多項式を比べてみることができる．密接に関連した計算は [T, Proposition 2.3.2] を参照せよ．

我々が議論してきた $G$ 表現の複素解析的変動とそのカルティエ因子の研究プログラムに関連して，4 つの自然な問題が生じる．$G$ を結び目群とし，$G$ 表現の複素解析的変動 $(M, V)$ が与えられているとしよう．この $(M, V)$ について，次の問がある(正しいかもしれないし，正しくないかもしれない)．

**1. $\boldsymbol{L}$ 関数が恒等的に 0 にならないこと：**$\mathcal{H}_1(G, V)$ はねじれ連接 $\mathcal{O}_M$ 加群か?

**2. $\boldsymbol{L}$ 関数の零点集合の一般的な点で $\boldsymbol{L}$ 関数が 1 位の零点をもつこと：**(もし **1** の答えが肯定的ならばカルティエ因子 $Z(M, V)$ は存在するので，$Z(M, V)$ について問うことができる：) $Z(M, V)$ は被約か．すなわち，その既約成分のそれぞれの重複度は 1 であるか?

**3. 一般的な既約性：**$(M, V)$ は($G$ の作用で安定な真の部分ベクトル束をもたない，という意味で) $G$ 表現の既約な変動 $(M', V')$ からの底変換によって得ることができるか?

4 番目の問題は次の漠然とした問によって示唆される：

**4. 与えられた結び目群 $G$ の次数 $n$ の既約表現の"普遍空間"は，"いくつの"連結成分をもつか?** 2つの次数 $n$ の $G$ の複素表現が連結なパラメータ多様体 $M$ 上の $G$ 表現の(1つの)複素変動の族の一員にもし現れるならば，それらは**同じ連結成分にある**と言おう．もし我々が変動的な方法でこれらの表現を研究したいならば，連結成分が少なければ少ないほど，我々にとって易しくなる!

これらの問の答えがどのくらい多くの場合に肯定的か，または否定的か，見当をつけられるほど十分には私は知らないが，これらすべての問題の類似が，モチーフを議論する際に再び現れるだろう．

上の構成を少し変形したものや拡張したもののいくつかは，(モチーフの状況でそれらの類似物が登場する範囲で)おそらく言及するに値するだろう．初めに，層 $\mathcal{H}_1(G,V)$ が(連接だが)ねじれ的でないときでさえ，その(標準的な)ねじれ $\mathcal{O}_M$ 部分加群を取り出して，それに伴うカルティエ因子を研究することができる．次に，経線 $\gamma \in G$ [17]を固定して(結び目の向きが与えられれば，共役を除いてこの元は一意的である)，$\rho(\gamma)$ の共役類がある特定の性質をみたす $G$ 表現の変動に限定して考えてもよく，この性質を考慮すると，ときどき $\mathcal{H}_1$ の適当な修正版を定義できる．例えば，$V/(\rho(\gamma)-1)V$ が $M$ 上の直線束であると仮定して，$\mathcal{H}_1(G,V)$ を

$$\mathcal{H}_1(G,V) \to \mathcal{H}_1(\Gamma, V/(\rho(\gamma)-1)V)$$

の核 $\tilde{\mathcal{H}}$ に置き換えてもよい．ここで $\Gamma = \langle \rho(\gamma) \rangle$ は $\rho(\gamma)$ で生成される $G$ の部分群である．何年も前にS. ノヴィコフは，2 橋結び目(two-bridge knot)に対して，2 次の表現を用いるそのようなタイプの構成を提案した．2 橋結び目はシューベルト(Schubert) [Schu] により研究され分類された．2 橋結び目の議論については [B-Z] を見よ[18]．2 橋結び目群 $G$ は

$$G = \langle a, b | wa = bw \rangle$$

の形の表示をもつことを思い出せ．ここで $w$ は $a$, $b$ で生成される自由群の語

---

17 (訳注) meridian element の訳.

18 (訳注) 他に，例えば，村杉邦男,「結び目理論とその応用」，日本評論社 (およびその文献表にある本)も参考になる.

で，次の対称的な構造をもつ：

$$w = a^{\epsilon_1} b^{\epsilon_\nu} a^{\epsilon_2} b^{\epsilon_{\nu-1}} \cdots a^{\epsilon_{\nu-1}} b^{\epsilon_2} a^{\epsilon_\nu} b^{\epsilon_1}.$$

ここで $\epsilon_j$ は $\pm 1$ を表す．上の規約で，結び目群 $G$ はただ 1 つの語 $w$ で完全に与えられる．これらの結び目群の $n$ 次の表現の空間$(n \geq 1)$の記述はライリー(Riley) [R] によって与えられ，また少し違う形で L. T. K. トゥカング(Tkhang) [T] によって与えられた．任意の 2 橋結び目 $K$ に対して，その結び目群の 2 次の表現に関するあるパラメータ空間($M^{(2)}$ と呼ぼう)で，$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ へ有限かつ平坦に射影するものが存在する．このとき，$\tilde{\mathcal{H}}$ の台(support)の因子的部分の $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ への順像は，2 変数ローラン多項式 $\Delta_K(r,s)$ で切り取られ，したがって(可逆元倍を除いて) $K$ の(向き付けられた)結び目の型(knot type)に対する不変量である．

2 橋結び目 $K$ に対し，ライリーとトゥカングの両者は多項式 $\Delta_K(r,s)$ (を少し修正したもの)である $K$ のローラン多項式不変量の興味深い計算を行った．より正確には，トゥカングは 1 次元コホモロジーの階数において飛躍が起こる点の集合によって切り取られる因子について計算し [T] に発表した．トゥカングは彼の計算した，

$$w_\nu = (ab)^\nu (a^{-1}b^{-1})^\nu (ab)^\nu (a^{-1}b^{-1})^\nu (ab)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

をもつ 2 橋結び目の系列に対する多項式不変量がホムフリー多項式[19]よりもずっと複雑な再帰的関係式をみたすことを指摘し，したがって $\Delta_K(r,s)$ とホムフリー多項式の間の(簡単な)結び付きはありそうもないと示唆した．結び目群のホモロジー代数的不変量と結び目理論の他の道具との関係を(どんなものでも)より深く理解することは興味深いことであろう．

しかしここでは話題を変えて，モチーフの $p$ 進変動の**基本的なホモロジー代数**を議論しよう．

---

[19] (訳注) HOMFLY polynomial の訳．HOMFLY というのは，この多項式をほとんど同時に定義した 6 人の数学者の頭文字を取ったもので英語としての意味はない．

## 2. “古典的” $p$ モチーフ

素数 $p$ を固定する．$\overline{\mathbf{Q}}_p$ を $p$ 進数体の代数的閉包とし，$\overline{\mathbf{Q}} \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$ を $\overline{\mathbf{Q}}_p$ での有理数体の代数的閉包とする．$G_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ とおく[20].

$\mathrm{ord}_p : \mathbf{Q}_p \to \mathbf{Q}$ は $\mathrm{ord}_p(p) = 1$ と正規化した $\mathbf{Q}_p$ の離散付値を表す．このとき，$\mathrm{ord}_p$ は $\overline{\mathbf{Q}}_p$ 上の付値に延長され，$\mathrm{ord}_p$ が定める距離により $\overline{\mathbf{Q}}_p$ を完備化して，完備な代数的閉体 $\mathbf{C}_p := \hat{\overline{\mathbf{Q}}}_p$ (“テイト(Tate)の $p$ 進複素数”)を得る．$G_{\mathbf{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ とおく．$\overline{\mathbf{Q}}_p$ への $G_{\mathbf{Q}_p}$ の作用は，位相体 $\mathbf{C}_p$ への連続 $G_{\mathbf{Q}_p}$ 作用に拡張されることを思い出せ．$\mathbf{C}_p[G_{\mathbf{Q}_p}]$ は，乗法が $\lambda[g]\cdot\lambda'[g'] = (\lambda g(\lambda'))[gg']$ である**非可換**な群環とする．

$\mathbf{C}_p$ の整数環を $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ と書き，その剰余環を $\overline{\mathbf{F}}_p$ と書く．体 $\overline{\mathbf{F}}_p$ は $\mathbf{F}_p$ の代数的閉包である．$E \subset \mathbf{C}_p$ を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体とする．

有限次元 $\mathbf{C}_p$ ベクトル空間上の $\mathbf{Q}$ のガロア群の表現を考えよう．ここで重要な役割を演ずる限定された表現の型に名前を付けるために，私が**モチーフ**という用語を借りて次のように定義してもあまり混乱しないと思う．

**定義**　$E \subset \mathbf{C}_p$ に係数をもつ**古典的 $p$ モチーフ**とは，有限次元 $E$ ベクトル空間 $W$ で $\mathbf{Q}$ の有限個の素点以外で不分岐な連続 $G_{\mathbf{Q}}$ 作用をもち，さらに $G_{\mathbf{Q}}$ の作用をその部分群 $G_{\mathbf{Q}_p}$ に制限した表現がフォンテーン(Fontaine)の意味でクリスタル表現 [F 1, 4] である，という性質をもつものを言う．

**モチーフ**という単語を使う穏当な正当性は，もし [F-M] にある予想が成り立つならば，上で定義した “古典的 $p$ モチーフ” は $G_{\mathbf{Q}}$ 加群として既約であるとき [F-M] で述べた意味で “代数幾何から来る” ことである．体 $E$ を $W$ の “係数体” と呼び，$\dim_E(W)$ を $W$ の**階数**と呼ぶ．

クリスタル(と潜在的半安定(potentially semistable)) $G_{\mathbf{Q}_p}$ 表現の理論のいくつかの主要な結果と構成の簡潔な概説については [F-I] を見よ．

$W$ を古典的 $p$ モチーフとする．それを $G_{\mathbf{Q}_p}$ 加群と見て，そのフォンテーン-デュドネ加群を

---

[20] (訳注) ガロア拡大 $L/K$ のガロア群を $\mathrm{Gal}(L/K)$ と書く．

$$D := (W \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{\mathrm{crys}})^{G_{\mathbf{Q}_p}}$$

とする[21]．このとき $D$ は $W$ の $E$ ベクトル空間の構造を継承する有限次元 $\mathbf{Q}_p$ ベクトル空間である．我々の基礎体は $\mathbf{Q}_p$ なので，特徴のない事実だが，フロベニウス作用素 $F\colon W \to W$ は(より一般の基礎体のときの**半線型**というよりむしろ) $E$ 線型であり，標準的なド・ラームフィルター付け(de Rham filtration) $D^\bullet := \mathrm{Fil}^\bullet(D)$ は $E$ ベクトル空間 $D$ 上のフィルター付けである．フィルター付け $D^\bullet$ は減少フィルター付け($D^{i+1} \subset D^i$)であり，上に収束($\cup_i D^i = D$)し，かつ分離的($\cap_i D^i = 0$)であることを思い出せ．例えば $W = \mathbf{Q}_p \otimes T_p(\mathbf{G}_m)$ ならば，$D$ は 1 次元 $\mathbf{Q}_p$ ベクトル空間で，フィルター付け $D^\bullet$ は $D^0 = 0$, $D^{-1} = D$ で定められ，フロベニウス作用素 $F$ は $p$ 倍である．ここで $T_p(\mathbf{G}_m)$ は乗法群の $p$ 進テイト加群である．

$W$ を古典的 $p$ モチーフとする．$j \in \mathbf{Z}$ に対して，商 $E$ ベクトル空間

$$\Delta^j := D^j / D^{j+1}$$

を $\Delta^j := \Delta^j(W)$ と書く．$\delta^j := \dim_E \Delta^j$ とおく．$\delta^j > 0$ である指数 $j$ の集合 $\mathcal{J}(W) \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ を $W$ の**飛躍指数(jump index)**の集合と呼ぼう．となりあう $\mathcal{J}(W)$ の中の飛躍指数の任意の組 $j < j'$ に対して，閉区間 $[j, j'] \subset \mathbf{R}$ を $\mathbf{R}$ における ***W* 区間**と呼び，$j$ が $\mathcal{J}(W)$ の最小の飛躍指数(または最大の飛躍指数)ならば，閉半区間 $(-\infty, j]$(または $[j, +\infty)$)も ***W* 区間**と呼ぶ．このようにして，実直線の $W$ 区間の和集合への分解を得る．これらの区間の端点が $W$ の飛躍指数である．これは後に役に立つであろう．

フォンテーンの理論(その理論の標準的な用語を使う．[F 1, F 2, F 4] 参照)により，クリスタル $G_{\mathbf{Q}_p}$ 表現は "ド・ラーム" であり([F 1] 3.10 節の定理を見よ)，ド・ラーム表現は "ホッジ-テイト" である([F 1] 5.2 節の定理を見よ)．$G_{\mathbf{Q}_p}$ が $\mathbf{C}_p$ ベクトル空間 $W \otimes_E \mathbf{C}_p$ に対角的な作用(すなわち $g \cdot (w \otimes c) = g \cdot w \otimes g \cdot c$)で作用しているとする．(半線型な) $\mathbf{C}_p[G_{\mathbf{Q}_p}]$ 加群 $W \otimes_E \mathbf{C}_p$ のホッジ-テイト分解は

$$W \otimes_E \mathbf{C}_p \cong \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \mathbf{C}_p(j)^{\delta_j}$$

21 (訳注) $B_{\mathrm{crys}}$ は $p$ 進ホッジ理論における基本的な環である．[F-I] 参照．

の形をもつ．ここで $\mathbf{C}_p(j)$ は 1 次元 $\mathbf{C}_p$ ベクトル空間

$$\mathbf{C}_p(j) := \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(\mathbf{G}_m)^{\otimes -j}$$

で，対角的な $G_{\mathbf{Q}_p}$ 作用が与えられた半線型 $\mathbf{C}_p[G_{\mathbf{Q}_p}]$ 加群とみる(これはすべての整数 $j$ に対して定義される)．上式の和は飛躍指数からなる(有限)集合 $\mathcal{J}(W)$ をわたる．

## 3. 精密化

この節では，$p$ モチーフで与えられる構造をやや充実させる暫定的な提案をしたい．このように充実させることは，よい $p$ 進剛解析変動理論を樹立するのにおそらく役立つであろう．しかしながら暫定的というのはキーワードである：というのは，今までのところ，我々の主な経験は階数が 2 以下の $p$ モチーフの変動理論であり，より高い階数に対して理論が発展したとき，予期せぬ驚きがたぶん(きっと!)あるように思われるからである．にもかかわらず，この充実化の概念が，ともかく少なくとも階数 2 以下において必要なことの自然な定式化を与えると思う．この概念は次のとおりである：

係数体 $E$ 上の古典的 $p$ モチーフ $W$ の**精密化**(**refinement**)とは，$\mathrm{Fil}^{\bullet}(D)$ を $D$ の $F$ 安定なフィルター付けに同型に写す $E$ 線型自己同型 $\tau\colon D \to D$ である．作用 $\tau^{-1} \circ F \circ \tau$ は $\mathrm{Fil}^{\bullet}(D)$ を保ち，したがって，$j$ 番目の次数部分 $\Delta^j$ の自己準同型を誘導し，それを $\{\tau^{-1} \circ F \circ \tau\}^j$ と書く．$j \in \mathbf{Z}$ に対して，作用 $U^j : \Delta^j \to \Delta^j$ を

$$p^j \cdot U^j = \{\tau^{-1} \circ F \circ \tau\}^j$$

という公式によって定義せよ．($U^j$ が $E$ の整数でない固有値をもつかもしれないということは心配するな.)

$E$ ベクトル空間 $\Delta^j (j \in \mathbf{Z})$ 上の線型作用素 $U^j$ の特性多項式

$$P_j(T) := \det_E(1 - T \cdot U^j)$$

を考え，それらの積

$$P(T) := \prod_j P_j(T) = 1 - u_1 T + u_2 T^2 - \cdots + (-1)^n u_n T^n$$

を作れ.

$P(T)$ を精密化された古典的 $p$ モチーフ $(W,\tau)$ の $U$ **多項式**と呼び，その係数の $n$ 組 $(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in E^n$ を $(W,\tau)$ の $U$ **係数**と呼ぶ．2 つの精密化が同じ $U$ 多項式をもつとき，それらを**同値**であるという．

**注意**　精密化を得るために，与えられた $p$ モチーフの係数体 $E$ を拡大する必要があるかもしれない．我々は，特定の自己同型 $\tau$ よりむしろ，精密化の**同値類**，すなわち，それから生じる $U$ 多項式に関心がある．$W$ が階数 $n$ の $p$ モチーフのとき，$D=D(W)$ に作用するフロベニウス作用素の特性多項式の根(重複度も数える!)の完全な集合を $\mathcal{R}:=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ とする．$W$ の**精密化**により $\mathcal{R}=\coprod_j\mathcal{R}_j$ と書くことができる．ここで各 $j\in\mathbf{Z}$ に対して $\mathcal{R}_j$ に含まれる(重複度も数えた)根の個数は $\delta_j=\dim\Delta_j$ である．精密化に付随した $U$ 多項式を，この分割 $\mathcal{R}=\coprod_j\mathcal{R}_j$ から読み取ることができる．そして部分集合 $\mathcal{R}_j$ を $j\in\mathcal{J}$ に写す写像を

$$\mathrm{ref}:\mathcal{R}\to\mathcal{J}$$

とすると，その $U$ 多項式はこの関数 ref で決定される．したがって，任意に与えられた階数 $n$ の $p$ モチーフの精密化から生じるたかだか $n!$ 通りの異なる $U$ 多項式がある．いくぶん制限された精密化の集まり(“臨界でない傾きをもつもの．” 以下をみよ)にしか我々は興味がない.

**なぜ，我々はこの付加的なデータを必要とするのか?** 精密化された古典的 $p$ モチーフの $U$ 多項式と $U$ 係数が与えるこの付加的なデータは，ただ単にガロア表現 $W$ の構造に対するちょっとした付加情報のように初めは思われるかもしれない．しかし，もし $W$ を $p$ 進的に変化させたいならば，このデータは非常に重要である．$PSL_2(\mathbf{Z})$ に対する重み $k$ の古典的モジュラー新形式 (classical modular newform) $f_k(q)=1+a_1q+a_2q^2+\cdots$ の場合に，このデータの必要性を示すヒントがある．$f$ のフーリエ係数で生成される環を $\mathbf{C}_p$ に埋め込んで，$f$ に付随する $p$ 進ガロア表現 $\rho_f:G_{\mathbf{Q}}\to GL_2(\mathbf{C}_p)$ を考えよ．仮に $p$ 進解析的に変化する(例えば，$p$ 進重みからなる $p$ 進開円板 $\mathcal{D}$ でパラメータ表示された)，次のようなガロア表現の族を見つけたいとする：$p$ 以外で不分岐なガロア表現の族で，ガロア表現 $\rho_f$ を含み，さらに整数重

み $k'$ からなるある稠密な $\mathcal{D}$ の部分集合があり，その対応するガロア表現が $PSL_2(\mathbf{Z})$ に対する重み $k'$ の古典的モジュラー新形式から来る．コールマン(Coleman)の定理 [C] により，これが可能であることが保証される．しかしながら，($\mathcal{D}$ において，より小さい円板に制限したり，より大きいものに延長したりしてよいことは無視して)このことを行うには一般的に **2 つ**のやり方があり，これらの方法は $\alpha_p$ の選択により区別される．ここで $\alpha_p$ は多項式 $X^2 - a_pX + p^{k-1}$ の根で $\mathrm{ord}_p(\alpha_p) < k-1$ をみたすものである．そういう $\alpha_p$ を選ぶと，$p$ 進的に変化する族 $\rho_\kappa^{(\alpha_p)}$ で，上の性質をもち，**かつ**，ある意味でその $\alpha_p$ が $p$ 進的に変化する族が存在する．すなわち，ある $p$ 進解析関数 $\alpha_p(\kappa)$ が存在して，その族 $\rho_\kappa^{(\alpha_p)}$ に現れるガロア表現に対応する $PSL_2(\mathbf{Z})$ に関する重み $k' \gg 0$ の古典的モジュラー固有形式 $f_{k'}(q) = 1 + a'_1q + a'_2q^2 + \cdots$ は，その多項式 $X^2 - a'_pX + p^{k'-1}$ の 2 つの根のうちの **1 つ**が $\alpha_p(k')$ であるという特徴をもつ．ここでの教訓は，もし“$f$ を $p$ 進的に変化” させたいならば，それは次の意味で可能であるということである：素数 $\ell \neq p$ のすべてのフロベニウス元のすべての固有値が $p$ 進的に変化する族を見つけることができ，$X^2 - a_pX + p^{k-1}$ の(一般的な) 2 つの根のうち，**1 つ**が $p$ 進的に変化するようにもできるが，しかし，**両方はできない**．これら 2 つの根のどちらを $p$ 進的に変化させたいかの選択は，本質的に，我々が議論している精密化の構造であり，$\mathrm{ord}_p$ に関する不等式の条件は後に“臨界的でない傾き” となるための条件と呼ばれる．このうちのいくつかをより技術的に記述したものについては次節の例を見よ．このような $\alpha_p$ の選択をして初めて，$p$ 進 $L$ 関数が構成できることにも言及すべきである：$f$ に伴う $p$ 進 $L$ 関数 $L^{(\alpha_p)}(f, \chi)$ ([A-V], [V], [M-T-T] 参照) は $\alpha_p$ の選択に依存している．

階数 1 の古典的 $p$ モチーフは同値を除いて一意的な精密化をもち，より一般に，ガロア表現 $W$ が(例えば [P 1] の意味で) $p$ 通常($p$-ordinary)であるとき，付随する $U$ 多項式のすべての根が $p$ 進単数となる $W$ の精密化が存在する．そのような精密化を **$p$ 通常精密化($p$-ordinary refinement)** と呼ぶ．$W$ の任意の $p$ 通常精密化の $U$ 多項式は一意的であることに注意せよ．

2 節の用語と記号を復習しよう．特に $W$ が階数 $n$ の $p$ モチーフであるとき，(重複度も数えた)根の集合 $\mathcal{R}$ や“$W$ 区間” の和集合への実直線の分解が

存在する．$W$ 区間の端点の集合が $W$ の飛躍指数の集合 $\mathcal{J}(W)$ である．$W$ の精密化の同値類を与えることは**精密化関数** $\mathrm{ref}\colon \mathcal{R} \to \mathcal{J}(W)$ を与えることと同値であることも思い出せ．低い階数の場合に良い性質をもつと思われる精密化の集まりを，“暫定的” に次のように定義しよう．この集まりは(少なくとも提案の初めとして)十分大きく，興味深いものである．

**暫定的定義**　次の 2 つの条件が成り立つとき，精密化関数 ref は**臨界的でない傾き**(**noncritical slope**)をもつという：

**a.** $\alpha \in \mathcal{R}$ の $\mathrm{ord}_p(\alpha) \in \mathbf{R}$ が飛躍指数 $j \in \mathcal{J}(W)$ のとき $\mathrm{ref}(\alpha) = j$.

**b.** $\alpha \in \mathcal{R}$ に対して $\mathrm{ord}_p(\alpha) \in \mathbf{R}$ が飛躍指数 $j \in \mathcal{J}(W)$ でないとき $\mathrm{ref}(\alpha)$ は $\mathrm{ord}_p(\alpha) \in \mathbf{R}$ を含む一意的な $W$ 区間の端点の 1 つである．

**一般的な注意**　臨界的でない傾きをもつ精密化は，次の意味で，テイトひねりと双対に関して “保たれる”：$W$ の精密化に対して，$W$ の任意のテイトひねりや双対 $p$ モチーフの上に精密化が誘導され，この精密化が臨界的でない傾きをもつことは，もとの精密化がそうであることと同値である．しかしながら，臨界的でない傾きという概念は(少なくとも一般には)テンソル積や対称積に関して保たれない．このことや，すべての古典的 $p$ モチーフが臨界的でない傾きをもつとは限らないことを考えると，**臨界的でない傾き**を判定する基準は，限定的だが，かなり自然な要請であると思いたい．それにより，少なくとも $p$ 通常よりもわずかに一般的な $p$ モチーフのクラスに対して議論ができるようになる．(もし古典的 $p$ モチーフ $W$ が $p$ 通常ならば，$W$ の精密化の同値類には臨界的でない傾きをもつものがただ 1 つあり，その精密化は上に導入した $p$ 通常精密化である．) しかし，以下で議論する剛解析的補間理論は，臨界的でない傾きをもつ精密化された古典的 $p$ モチーフを “解析的に連続につなげ”，いくらかより広い，精密化された古典的 $p$ モチーフのクラスを “とらえられる” こともある．例えば，[Co-M] で示したように，(奇素数 $p$ で)レベル 1 の古典的モジュラー新形式から来る階数 2 の古典的 $p$ モチーフの場合，これらの $p$ モチーフの(臨界的でない傾きをもつ)精密化を補間する変動理論はこれらの新形式から来る**すべての**精密化(非臨界的だけでなく臨界的なもの)も含む．

## 4. 例

$N$ を正整数, $p$ を $N$ と素な素数とする. $f(q) = 1 + a_1q + a_2q^2 + \cdots \in E[[q]]$ を重み $k$ の $\Gamma_0(N)$ に関する尖点(cuspidal)モジュラー新形式のフーリエ展開とする. よって $f$ は $N$ と素なすべての素数 $\ell$ に対するヘッケ作用素 $T_\ell$ について固有形式である. すでに指摘したように $f$ のフーリエ係数は体 $E$ の元(したがってその整数環の元)であると仮定した. さらに多項式

$$X^2 - a_pX + p^{k-1} = (X - \alpha_p) \cdot (X - \beta_p)$$

は $E$ において 1 次式の積に因数分解されていると仮定する. ゆえに $W$ が $f$ に付随する古典的 $p$ モチーフならば, $f$ の根 $\alpha_p, \beta_p$ はその $G_{\mathbf{Q}_p}$ 表現 $W$ に伴うフォンテーン-デュドネ加群 $D$ におけるフロベニウス作用素 $F$ の 2 つの固有値である([Sa] 参照). アトキン(Atkin)-レーナー(Lehner)作用素 $U_p$ を $f$ に適用すると, 重み $k$ の $\Gamma_0(pN)$ に関するモジュラー形式 $U_pf$ を得る. これは $pN$ と素なすべての素数 $\ell$ に対するヘッケ作用素 $T_\ell$ の固有形式である. $f$ と $U_pf$ で生成される 2 次元 $E$ ベクトル空間は, アトキン-レーナー作用素 $U_p$ とともに $pN$ と素な素数 $\ell$ に対するすべてのヘッケ作用素に関して安定である. このベクトル空間を対角化して, 重み $k$ の $\Gamma_0(pN)$ に関する "2 つの" モジュラー形式を得る(これを $f'$, $f''$ と呼ぼう). これは $pN$ と素なすべての素数 $\ell$ に対するヘッケ作用素 $T_\ell$ とアトキン-レーナー作用素 $U_p$ に対して固有形式である. ここで $U_pf' = \alpha_pf'$, $U_pf'' = \beta_pf''$ である. これら 2 つの "双子の" 固有形式 $f'$, $f''$ に伴うガロア表現は(ともに $f$ に伴うガロア表現と)等しく, それぞれに対して, $pN$ と素な素数 $\ell$ に対するすべてのヘッケ作用素 $T_\ell$ の固有値は $f$ の対応するヘッケ作用素の固有値に等しい. 考えている作用素の中で, $f'$ と $f''$ をおそらく区別でき得る作用素はアトキン-レーナー作用素だけである(そのための必要十分条件は $\alpha_p \neq \beta_p$ である. 簡単のため, これを仮定する). $\alpha_p, \beta_p \in \mathcal{O}_{E_v}$ かつ $\alpha_p \cdot \beta_p = p^{k-1}$ である. $f'$ の傾き(**slope**)を $\sigma(f') := \mathrm{ord}_p(\alpha_p)$ と定義する. ここで $\mathrm{ord}_p$ は $\mathrm{ord}_p(p) = 1$ と正規化されている. また $f''$ に対しても同様に定義する. したがって

$$\sigma(f') + \sigma(f'') = k - 1$$

であり，ゆえに $0 \le \sigma(f') \le k-1$ である．真の不等式 $\sigma(f') < k-1$ が成り立つとき，$f'$ は**臨界的でない傾き**をもつという．$D$ のフィルター付けの構造は 2 段であり，自明でない部分が $\Delta^0$ と $\Delta^{k-1}$ である．仮に $f'$ が臨界的でない傾きをもったとせよ．このとき，$\alpha_p$ を固有値にもつ $F$ の固有ベクトルで生成される $D$ の $F$ 固有空間に，$\mathrm{Fil}^0 D$ を全射に写す精密化 $\tau\colon D \to D$ を考えよ．

上で書いたように，この精密化の $U$ 多項式は

$$P(T) = (T-\alpha_p)\cdot(T-\beta_p/p^{k-1}) = (1-\alpha_p T)\cdot(1-\alpha_p^{-1}T)$$

で与えられ，その $U$ 係数 $u(W,\tau) = (u_1,u_2) \in E^2$ は単に，

$$(u_1,u_2) = (\alpha_p + \alpha_p^{-1}, 1)$$

であることがわかる．

この例に関して次のことに注意する．$\alpha_p \neq \beta_p$ である限り，$\alpha_p + \alpha_p^{-1} \neq \beta_p + \beta_p^{-1}$ なので，重み $k$ の $\Gamma_0(N)$ に関する新形式 $f$ に伴う古典的 $p$ モチーフ $W$ の精密化の $U$ 多項式には高々2 つの可能性があり，これらは $f$ と同じガロア表現を伴うような $\Gamma_0(pN)$ に関する重み $k$ の($pN$ と素な $\ell$ の $T_\ell$ と $U_p$ に関する)固有形式にちょうど対応する．$W$ の精密化が臨界的でない傾きをもつことは，$W$ を伴う $\Gamma_0(pN)$ に関する固有形式が臨界的でない傾きをもつことと同値である．

## 5. 精密化された $p$ モチーフの $p$ 進変動

$W$ を精密化された古典的 $p$ モチーフとし，状況をできるだけ単純にするために，“レベルの馴な部分が 1 (tame level 1)” であると仮定する．この意味は $W$ に付随する表現 $\rho_W : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Aut}_E(W)$ が $p$ 以外で不分岐ということである．また $\rho_W$ の剰余表現が絶対既約であると仮定する．これは次のようなガロア安定な $\mathcal{O}_E$ 部分格子(sublattice) $\Omega \subset W$ を見つけられることを意味する：$k = k_E \subset \overline{\mathbf{F}}_p$ を離散付値環 $\mathcal{O}_E$ の剰余体とし，“剰余” 表現(residual representation)

$$\bar{\rho}_W : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to \mathrm{Aut}_k(\Omega \otimes_{\mathcal{O}_E} k)$$

(ここで $G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ は，$p$(と $\infty$)以外で不分岐である $\overline{\mathbf{Q}}$ における $\mathbf{Q}$ の最大拡大体のガロア群である)を考えるならば，係数を $\overline{\mathbf{F}}_p$ に延長しても $\bar{\rho}_W$ は既約表現である．もともとの表現

$$\rho_W : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_E}(\Omega)$$

を剰余表現

$$\bar{\rho}_W : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to \mathrm{Aut}_k(\Omega \otimes_{\mathcal{O}_E} k)$$

の $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p} \subset \mathbf{C}_p$ への "ガロア変形" (Galois deformation)と見る．

もし $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to GL_n(k)$ が絶対既約表現で，$W$ が古典 $p$ モチーフで，適当な $k$ 同型 $\Omega \otimes_{\mathcal{O}_E} k \cong k^n$ の選択に対して $\bar{\rho}_W = \bar{\rho}$ ならば，$W$ は **$\bar{\rho}$ に属す**と言う．そこで，そのような剰余表現 $\bar{\rho}$ を 1 つ固定せよ．$X = X_{\bar{\rho}}$ を [Co-M] 1 章の意味で(この剛解析版よりむしろ代数版に関しては [M 1] 参照)，$\bar{\rho}$ のガロア変形 $\rho : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to GL_n(\mathbf{C}_p)$ からなる $E \subset \mathbf{C}_p$ 上の剛解析空間とする．$\mathbf{C}_p$ に値をもつ $X$ の点はそのような $\rho$ の同値類と 1 対 1 に対応する．$\rho$ が上のようなとき，$x = x(\rho) \in X(\mathbf{C}_p)$ は $\rho$ に対応する $X$ の点を表し，$\mathbf{C}_p$ に値をもつ $X$ の点 $x$ に対し，$\rho_x : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to GL_n(\mathbf{C}_p)$ は $x$ に対応する同値類を代表する準同型とする．もし $\mathcal{V} = \mathcal{O}_X^n$ が $X$ 上の階数 $n$ の自明なベクトル束ならば，$G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ から $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{V}) = GL_n(\mathcal{O}_X)$ への連続準同型がある．あるいは同値であるが，$\mathbf{C}_p$ に値をもつ $X$ の各点 $x$ での $\mathcal{V}$ のファイバー $\mathcal{V}_x$ に $\rho_x : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to GL_n(\mathbf{C}_p)$ で作用する，$\mathcal{V}$ への $G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ の $\mathcal{O}_X$ 線型な作用がある．詳しくは上記の文献を見よ．

$X$ と $n$ 次元アフィン空間との直積として与えられる剛解析空間を $Y$ とせよ．

$$Y := X \times \mathbf{A}^n.$$

(上にまとめた仮定をみたす)任意の $\bar{\rho}$ に属する精密化された古典的 $p$ モチーフ $(W, \tau)$ は以下のようにして，点 $y(W,\tau) \in Y$ を定める．$y(W,\tau)$ の $X$ 座標は，表現 $\rho_W$ を分類している $X$ の点 $x(\rho_W)$ で与えられ，一方 $\mathbf{A}^n$ 座標は $U$ 係数 $u(W,\tau) \in \mathbf{A}^n(E) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C}_p)$ のなす順序付き $n$ 組である．任意の $\mathbf{C}_p$ に値をもつ $Y$ の点で，$\bar{\rho}$ に属する精密化された古典的 $p$ モチーフ $(W,\tau)$ に対する $y(W,\tau)$ と表せる点を，単に $Y$ の**古典的 $p$ モチーフ点**と呼ぼう．[Co-M] の観点(その 1.2 節参照)を続けて，$Y$ の臨界的でない傾きをもつモチーフ点

からなる集合の剛解析的ザリスキー閉包を $\mathcal{M}(\bar{\rho})$ と表す．$\pi : \mathcal{M}(\bar{\rho}) \to X$ を自然な射影とする．このとき精密化された古典的 $p$ モチーフ $(W, \tau)$ に対して，$\pi(y(W,\tau)) = x(\rho_W)$ である．

**定義**　**$\bar{\rho}$ に属する精密化された $p$ モチーフ**とは，$\mathbf{C}_p$ に値をもつ剛解析空間 $\mathcal{M}(\bar{\rho})$ の点のことである．

直観的に，$p$ **モチーフ**は "剛解析的に連続な" 古典的 $p$ モチーフの一種である．前節の議論において，臨界的でない傾きをもつ精密化されたモチーフの定義を "暫定的" と呼んだので，我々がたった今与えた精密化された $p$ モチーフの定義もまたこの "暫定的な状況" を共有している．

$m \in \mathcal{M}(\bar{\rho})$ が精密化された $p$ モチーフならば，"$m$ に付随するガロア表現" とは $m \in Y$ の $X$ 座標への射影を意味し，$\rho_m \in X$ と書く．$X$ 上の次数 $n$ の普遍 $G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ 表現を，$\pi$ により $\mathcal{M}(\bar{\rho})$ に引き戻すと，$\mathcal{M}(\bar{\rho})$ 上の階数 $n$ の(自明な)剛解析的ベクトル束で($\mathbf{V} = \mathbf{V}(\bar{\rho})$ と書く)，剛解析的 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\bar{\rho})}$ 線型 $G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ 表現

$$\rho^{\sharp} : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\bar{\rho})}}(\mathbf{V})$$

をもつものを得る．これより $\mathcal{M}(\bar{\rho})$ でパラメータ表示された $p$ モチーフに付随したガロア表現の剛解析的変動を得る．

少しだけ柔軟性を許すために，次のような 3 つ組

$$(\mathcal{M}, V, \rho)$$

を **$p$ 精密化されたモチーフの剛解析的変動**と呼ぼう．ここで $\mathcal{M}$ は $\mathbf{C}_p$ 上の剛解析空間で，$V$ は $\mathcal{M}$ 上の剛解析的ベクトル束で，$\rho : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}(V)$ は剛解析的表現であり，これらはある剛解析的射

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M}(\bar{\rho})$$

によって

$$(\mathcal{M}(\bar{\rho}), V(\bar{\rho}), \rho^{\sharp})$$

の形の 3 つ組を底変換して得られる．

**例：階数 1**　$p > 2$ とする．階数 1 の $p$ モチーフの普遍空間(この場合の精

密化は一意的)は古典的岩澤代数

$$\mathbf{Z}_p[[\mathbf{Z}_p^*]]$$

に付随する $\mathbf{Q}_p$ 上の剛解析空間である(これを $M^{(1)}_{(p)}$, あるいは，略して単に $M^{(1)}$ と呼ぶ)．したがって，$M^{(1)}$ は $p-1$ 個の開円板の非交叉和であり，特に 1 次元で滑らかである．1 節の余談のように(すなわち次数 1 の群表現の変動の普遍空間の議論のように)，階数 1 の(自由)$\mathcal{O}_{M^{(1)}}$ 加群と見て，$V^{(1)} :=$ 剛解析空間 $M^{(1)}$ の構造層 $\mathcal{O}_{M^{(1)}}$ とおく．準同型の合成

$$G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \xrightarrow{\chi} \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p[[\mathbf{Z}_p^*]]^* \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{M^{(1)}}} V^{(1)}$$

によって，$G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ を $\mathcal{O}_{M^{(1)}}$ 線型に $V^{(1)}$ へ作用させよう．ここで $\chi : G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}} \to \mathbf{Z}_p^*$ は "$p$ 円分指標" である($\mu_{p^\infty} \subset \mathbf{C}_p^*$ を 1 の $p$ べき根からなる部分群とすると，整数 $n \in \mathbf{Z} \cap \mathbf{Z}_p^*$ を自己同型 $\zeta \mapsto \zeta^n$ に対応させる自然な同一視

$$\mathbf{Z}_p^* = \mathrm{Aut}(\mu_{p^\infty})$$

が得られる．つまり $g \in G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ に対して，$\chi(g) \in \mathbf{Z}_p^*$ をガロア自己同型 $g : \mu_{p^\infty} \to \mu_{p^\infty}$ と同一視された $p$ 進単数と定義する)．これは次数 1 の $G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ 表現の普遍変動 $(M^{(1)}, V^{(1)})$ を定義する．この普遍変動は(上で定義したように)次数 1 の $p$ モチーフの普遍変動と同じである．この構成はもちろん次の意味で "代数的" である：$M^{(1)}$ は岩澤代数 $\mathbf{Z}_p[[\mathbf{Z}_p^*]]$ の下部空間となる剛解析空間であり，その表現もまた代数的である．もっと高い階数の $p$ モチーフの変動に対して，"代数的な" 圏で都合よく考えることはもはやできない：$p$ 進剛解析的パラメータ空間や表現の剛解析的な変動を(階数 2 の変動の場合でさえも)使わなければいけない．

**例：階数 2**　$p > 2$ のときに [Co-M] で構成された，$p$ 進剛解析曲線 $C$("固有曲線(eigencurve)")で分類される過収束固有形式は，(この論説で仮定したように，少なくとも剰余表現が絶対既約ならば)階数 2 の $p$ 精密化された $p$ モチーフの例を与える．$C_{\mathrm{r.i.}} \subset C$ を剰余表現が絶対既約であるような過収束固有形式に対応する固有曲線の部分とする．($\mathbf{C}_p^*$ に値をもつ)連続指標によるこれらの過収束固有形式のひねりすべては，階数 2 の $p$ 精密化された $p$ モ

チーフである．（$\mathbf{C}_p^*$ に値をもつ）$G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ 上のすべての野性的連続指標[22]の普遍変形空間は開円板 $D$ である．したがって，剛解析曲面 $C_{\mathrm{r.i.}} \times D$ でパラメータ表示された階数 2 の $p$ モチーフの剛解析的変動を得る．この曲面は階数 2 の精密化された $p$ モチーフの普遍空間であるか?

**注釈と問**　(剛)解析接続に依らない，$p$ モチーフのより内在的な定義はあるか？ これは剛解析的な意味で，クリスタル表現を補間する $G_{\mathbf{Q}_p}$ 表現の変動理論の確立にかかっている(階数 2 の場合におけるこのことに関する考察については [Co-M] の序文を見よ)．

様々な言葉を組み合わせて，我々は変動理論をスケッチしてきた．そしてこの理論が提示する本質的な問が多くの数学の現場なのである．しかし，これはすべてまだ，その発展のほんの始めの段階にすぎない．深遠な進展の多くは，これまでモチーフと保型表現の対応から来た．このことはラングランズ・プログラムから期待されているだけだが，ワイルズ(Wiles)の研究で十分に例示されている．いくらか限定された本論説の用語を用いると，保型・モチーフ統一理論を作る壮大な目標が示唆することは，$GL(n)$ に対する保型形式に付随するヘッケ代数の適当な完備化として，階数 $n$ の精密化された $p$ モチーフの変動の構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\bar{\rho})$ も(“再”)構成できるべきである，ということである．これは，特に $\boldsymbol{p}$ **通常**表現(ここで精密化も $p$ 通常にとる)の状況において，肥田晴三によって始められた計画である．彼の独創的な理論は，今や非常に有力であり，$GL(2)$ の $\mathbf{Q}$ 上のモジュラー固有形式に対するものであった．そこで彼は $p$ 通常精密化された $p$ モチーフの変動で，$\boldsymbol{p}$ **通常**な古典的モジュラー固有形式から来るモチーフがザリスキー位相で稠密である変動を見つけた．さらに，彼が構成した変動において，$\mathbf{C}_p$ に値をもつ点はすべて“過収束 $p$ 進モジュラー固有形式から来る”という解釈をもつことを示した．これを有限の傾きをもつ過収束 $p$ 進モジュラー固有形式に拡張した研究については，コールマン [C] が開いた重要な突破口を見よ([Co-M], [G-M], [M 2] も参照)．ティルイン(Tilouine)やその他と共に，肥田のその後のプログラムは高い階数の簡約群の保型形式の研究を含む．例えば，この分野の広大な研

---

[22] (訳注) wild continuous character の訳．

究のリストについては，[H 1, H 2] の参考文献を見よ．

群のホモロジーの変動理論との類似を追求するために，今，こう尋ねよう：

## 6. 精密化された $p$ モチーフの $p$ 進変動の “ホモロジー代数” はあるのか?

この問の意味は次のとおりである．一般の場合にそういう理論が必要とすることについて，私ははっきりしていない．しかし 1 つの例をより正確にすることによって，その必要とされるものを構成してみようと思う．$G = G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ とする．任意の精密化された $p$ モチーフの変動 $(\mathcal{M}, V)$ に対して，我々は連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 加群のなす層

$$\mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}(G, V)$$

の自然な定義がほしい．層に値をもつこの “ホモロジー理論の始め” は，$V$ について加法的であるべきであり，その構成は平坦底変換で保たれなければいけない．また，もし $G$ 余不変商が消えるならば(剰余表現が絶対既約という我々の仮定から，$V$ の階数が 1 より大きい場合は正しいだろう)，その構成は任意の底変換と可換でなければいけない．我々は次のことも必要とするだろう：もし点 $m \in \mathcal{M}$ が $p$ モチーフ的 1 次元ホモロジーのなす $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 加群の台に入っていれば，つまり

$$m \in \mathrm{Supp}\ \mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}(G, V) \subset \mathcal{M}$$

ならば，階数 $n+1$ の $G$ 表現 $\tilde{V}_m$ であって，$V_m$ の $\mathbb{C}_p$ 双対による階数 1 の “自明な” 精密化された $p$ モチーフの不分裂な拡大であるものが存在する．さらに，点 $m \in \mathcal{M}$ が臨界的でない傾きをもつ古典的 $p$ モチーフ，つまり $m \in \mathrm{Supp}\ \mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}$ ならば，$p$ でクリスタル表現である $\tilde{V}_m$ が存在する．

現在，我々は $p$ モチーフ的 $\mathcal{H}_1$ の(変動的)理論のほんの小さな断片しか手にしていない．かっこ付きの “**変動的**” の意味は，単に $p$ モチーフの $p$ 進変動のすべてのパラメータ空間上で有効な一般的構成法が我々には現在欠けていることである．より明確に言えば，古典的でない $p$ モチーフに対する有効な一般的構成法が現在知られていない．それとは対照的に，$p$ で実際にクリ

スタル表現であるガロア表現 $M$ に対して，適切なモチーフ的 $H^1$ の有望な(コ)ホモロジー的構成が実際に存在する．私がここで言及しているのは，ブロック(Bloch)と加藤和也が導入した $H^1_f(G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}, M)$ と書くコホモロジー群のことである．この分野の概要については [Mot] の巻の様々な解説論文や，また [F 4]，[Colm] を見よ．

それでも以下の例のように，あるパラメータ空間上には，$p$ モチーフの $p$ 進解析変動の妥当な候補が実際に存在する場合がある．

**例：階数 1**　上で述べたように階数 1 の $p$ モチーフの普遍変動 $(M^{(1)}_{(p)}, V^{(1)}_{(p)})$ を考えよう．

この階数 1 の $p$ モチーフの普遍変動に対して，連接 $\mathcal{O}_{M^{(1)}_{(p)}}$ 加群である $\mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}(G, V^{(1)}_{(p)})$ の候補を定義しよう．この連接加群を $\tilde{\mathcal{H}}_1$ と書く．

$\tilde{\mathcal{H}}_1$ の構成は古典的な岩澤理論から直接来る：$K_n := \mathbf{Q}(\mu_{p^n}) \subset \mathbf{C}_p$ を 1 の $p^n$ 乗根を有理数体にすべて添加した体とし，$K_\infty := \cup_{n=1}^\infty K_n = \mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})$ とする．各 $n \geq 1$ に対して，$L_n/K_n$ を $\mathbf{C}_p$ における $K_n$ の最大不分岐アーベル $p$ 拡大とし，$L_\infty := \cup_{n=1}^\infty L_n$ とおく([W] 13 章参照)．$X := \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ とおくと，短完全列[23]

$$1 \to X \to \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}) \to \mathbf{Z}_p^* \to 1$$

を考えることにより，$X$ への副有限群(profinite group) $\mathbf{Z}_p^*$ の自然な連続 $\mathbf{Z}_p$ 線型な作用が得られる(同上参照)．解析的 $\mathcal{O}_{M^{(1)}_{(p)}}$ 加群

$$\mathcal{X} := X \otimes_{\mathbf{Z}_p[[\mathbf{Z}_p^*]]} \mathcal{O}_{M^{(1)}_{(p)}}$$

をつくり，$\mathcal{X}$ 上への $\mathbf{Z}_p^*$ の自然な "対角" 作用を得る(すなわち，$\gamma \in \mathbf{Z}_p^*$ と，$X \otimes_{\mathbf{Z}_p[[\mathbf{Z}_p^*]]} \mathcal{O}_{M^{(1)}_{(p)}}$ の局所切断 $x \otimes w$ に対して，$\gamma \cdot (x \otimes w) = \gamma \cdot x \otimes \gamma \cdot w$ を得る)．今我々は，この状況での $p$ モチーフ的 $\mathcal{H}^1$ の暫定的候補を提案できる．

**定義**

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 \ := \ \mathcal{H}_0(\mathbf{Z}_p^*, \mathcal{X}).$$

---

23 (訳注) $p$ 円分指標により $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})$ と $\mathbf{Z}_p^*$ を同一視する．

すなわち，これは $\mathcal{X}$ の $\mathbf{Z}_p^*$ 余不変な元のなす，パラメータ空間 $M_{(p)}^{(1)}$ 上の層である．

**問題**　我々がたった今定義した $\mathcal{O}_{M_{(p)}^{(1)}}$ 加群 $\tilde{\mathcal{H}}_1$ の構造と岩澤加群 $X$ の不変量を関係付けること，そこから，レオポルト-久保田 $p$ 進 $L$ 関数と関係付けることは演習問題として残そう．また $\tilde{\mathcal{H}}_1$ の我々の定義は，簡潔にするために余不変な元のなす層として，すなわち "$H_0$" で与えた．しかし，適当に定義した(位相 $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ 加群 $V_{(p)}^{(1)}$ に値をもつ副有限群 $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ の) "$H_1$" としても表現できる．

$V_{(p)}^{(1)}(m)$ を $m$ での $V_{(p)}^{(1)}$ のファイバーとし，($\mathbf{C}_p$ に値をもつ 1 次元) $G$ 表現空間とみると，$m \in M_{(p)}^{(1)}$ が層 $\tilde{\mathcal{H}}_1$ の台に入るための以下の判定基準がある．

**命題**　$m \in \mathrm{Supp}\ \tilde{\mathcal{H}}_1$ である必要十分条件は，次のような 2 次元($\mathbf{C}_p$ ベクトル空間への) $G$ 表現 $\tilde{V}$ が存在することである：$\tilde{V}$ は $V_{(p)}^{(1)}(m)$ の $\mathbb{C}_p$ 双対 $V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$ による "自明" な 1 次元 $G$ 表現の不分裂な拡大であり，$p$ での惰性群 $\mathcal{I}_p \subset G = G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ に制限して $\mathcal{I}_p$ の表現空間と見たとき分裂する．

**証明**　$X$ はアーベル副 $p$ 群(abelian pro-$p$-group)で，$\mathbf{Z}_p^* \cong \mathbf{F}_p^* \times \mathbf{Z}_p$ であり，完全系列

$$1 \to X \to \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}_p^* \to 1$$

における射影 $\pi$ は連続な左逆写像をもつ．ゆえに $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ は $X$ と $\mathbf{Z}_p^*$ の半直積と同一視できる．$p$ での惰性群 $I_p \subset \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ の選び方が，そのような左逆写像を与える．なぜなら，各有限の段階 $n \geq 1$ において，$p$ での惰性部分群 $I_{p,n} \subset \mathrm{Gal}(L_n/\mathbf{Q})$ をどのように選んでも，$I_{p,n}$ は $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q})$ へ同型に射影され，$\mathrm{Gal}(L_n/\mathbf{Q})$ は $\mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ と $I_{p,n} = \mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*$ の半直積で表されるからである．$\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ を，$X$ と $I_p = \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}) = \mathbf{Z}_p^*$ との半直積と同一視するために，$p$ での惰性群 $I_p \subset \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ を 1 つ固定せよ．各 $\tilde{g} \in \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ を，$x = x(\tilde{g}) \in X$ と $z = z(\tilde{g}) \in \mathbf{Z}_p^*$ に対して $\tilde{g} = x(\tilde{g}) \cdot z(\tilde{g})$ と書く．もし $\tilde{g} \in I_p$ ならば $x(\tilde{g}) = 0$ であることに注意せよ．$m \in \mathrm{Supp}\ \tilde{\mathcal{H}}_1$ は，0 でない $\mathbf{Z}_p^*$ 同変準同型 $h : X \to V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$ が存在することと同値なことが定義から直接確かめられる．そのような $h$ を固定し，

$\tilde{V}^{\{h\}} := \mathbf{C}_p \oplus V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$ とおき，2 次元 $\mathbf{C}_p$ ベクトル空間 $\tilde{V}^{\{h\}} = \tilde{V}$ 上の $G$ 表現を次のように定義する：

$$w \oplus v \quad \in \quad \mathbf{C}_p \oplus V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{} = \tilde{V}$$

とし，$g \in G$ が $\tilde{g} \in \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$ に射影されるとき，

$$g(w \oplus v) := w \ \oplus \ \{w \cdot h(x(\tilde{g})) + g \cdot v\}.$$

この($K_\infty$ 上の)表現の分裂体 $\tilde{L} \subset L_\infty$ は，$h$ の核の作用で固定される $L_\infty$ の部分体であり，したがって $K_\infty$ の非自明な拡大である．さらに $\tilde{g} \in I_p$ ならば $x(\tilde{g}) = 0$ であり，ゆえに $h(x(\tilde{g})) = 0$ である．すなわち上の表現は $I_p$ に制限したとき分裂する．

逆の証明にもこの構成を利用できる：任意の 2 次元($\mathbf{C}_p$ ベクトル空間上の)$G$ 表現 $\tilde{V}$ を，$V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$ による "自明" な 1 次元 $G$ 表現の不分裂な拡大で，$I_p \subset G = G_{\mathbf{Q},\{p,\infty\}}$ に制限した表現空間として見たとき分裂する表現とする(ここで $I_p$ は $p$ での惰性群を表す)．また，$\tilde{L}/K_\infty$ をその $G$ 表現 $\tilde{V}$ の分裂体とする．このとき $\tilde{L}/K_\infty$ は，有限の段階の体 $K_n$ の $p$ アーベル拡大で至るところ不分岐なものの和集合($n$ に関して和を取る)として表すことができ，したがって $\tilde{L} \subset L_\infty$ であることに注意せよ．特に全射連続準同型 $\eta : X \to \mathrm{Gal}(\tilde{L}/K_\infty)$ を得る．$G$ の作用が $V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{} \subset \tilde{V}$ を保ち，我々の選んだ $I_p$ の作用が $\mathbf{C}_p \subset \tilde{V}$ を固定するように，下部空間の $G$ 表現空間 $\tilde{V}$ と $\mathbf{C}_p \oplus V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$ の同型写像を選び，

$$\xi(g) = \ g(1 \oplus 0) \text{ の } V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{} \text{への射影}$$

という公式により準同型

$$\xi : \mathrm{Gal}(\tilde{L}/K_\infty) \to V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$$

を得る．

$h : X \to V_{(p)}^{(1)}(m)\hat{}$ を合成写像 $h = \xi \cdot \eta$ とすれば，我々の $G$ 表現 $\tilde{V}$ は前の議論で $\tilde{V}^{\{h\}}$ と書いた表現に同値であることがわかる．

**注釈と問**　$p$ 通常モチーフとその $p$ 進変形，その $L$ 関数については，*Algebraic Number Theory - in honor of K. Iwasawa* の巻の創造を駆りたてる論文

[C-P], [Gr 3], [Schn] を見よ．このアイデア(と [Gr 1, Gr 2] のアイデア)に従って，一般階数の $p$ 通常精密化された $p$ モチーフの場合に，$p$ モチーフ的 $\mathcal{H}_1$ の有望な候補と思われるものを定義できる(ここで明示的にこれを述べるには長くなりすぎるだろう)．しかし $p$ モチーフの $p$ 通常変動の状況以外では，私の知る限り，モチーフ的 $\mathcal{H}_1$ の定義の候補に妥当なものがない．そのような定義を与えることは，(階数 2 の $p$ モチーフの場合でさえ)興味深い研究課題だろうと思う．

剛解析空間 $M$ でパラメータ表示されている精密化された $p$ モチーフの変動があり，適切な $\mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}(G,V)$ が構成できる場合には(例えば現状では，$p$ モチーフの $p$ 通常変動に対してまずまずの定義がある)，1 節の 4 つの問の類似の問があり，さらにもう 2 つの問をおまけに付け加える：

**1. $L$ 関数が恒等的に 0 にならないこと：**$\mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}$ はねじれ $\mathcal{O}_M$ 加群であるか? これが成り立つ $M$ に対して，ねじれ $\mathcal{O}_{M'}$ 加群 $\mathcal{H}_1^{p\text{-motivic}}$ に付随する剛解析的カルティエ因子 $Z := Z(M,V)$ が得られ，したがって剛解析的直線束 $\Lambda(M,V) = \mathcal{O}_M(Z)$ と $\Lambda(M,V)$ の切断 $L(M,V) =$ “**1**” も得られる．

**2. $L$ 関数の零点集合の一般的な点において $L$ 関数が 1 位の零点をもつこと：**(もし **1.** の答えが肯定的ならば，そのカルティエ因子 $Z(M,V)$ が存在し，よって $Z(M,V)$ について問うことができる：) $Z(M,V)$ は被約であるか，すなわち，その各既約成分の重複度は 1 であるか？

**3. 剛性の問題.** 上記の望ましい性質によると，$L(M,V)$ の零点は直既約だが既約でない階数 $n+1$ の $G$ 表現の存在と関係するので，$L$ 関数の零点に対応する表現を，族の中の一般の表現が既約になるような階数 $n+1$ の $G$ 表現の族に埋め込めるかどうか，という問は興味深い．このことが正しく，またこの方針が $L$ 関数の零点の研究(や様々な形の “主予想”)に強力な応用をもつ場合がある．例えば，エルブラン(Herbrand)の定理に関するリベ(Ribet)の研究は(違う言葉で述べられているが)，この方法を的確に用いている([M-W] も見よ)．

**4. $\mathcal{M}(\bar{\rho})$ にはいくつの既約成分があるか?** また，与えられた $\bar{\rho}$ に対して，カルティエ因子 $Z(\mathcal{M}(\bar{\rho}), \mathbf{V}(\bar{\rho}))$ (が定義されるとき)の成分の個数は無限か有限か? カルティエ因子 $Z(\mathcal{M}(\bar{\rho}), \mathbf{V}(\bar{\rho}))$ の既約成分の個数が少なければ少な

いほど，そのカルティエ因子によってパラメータ表示された $L$ 関数の零点を，深く研究するのが容易になるだろう．

**5. “可視性” の問題.** ドュリーニュ(Deligne)，ベイリンソン，ブロック-加藤の予想とそれ以前のバーチ(Birch)とスウィナートン・ダイヤー(Swinnerton-Dyer)の予想とテイトの予想によって，複素(あるいは $p$ 進)平面における，変数 $s$ の**整数**値での $L$ 関数の零点は，具体的な状況に依って，代数的サイクルのなす群や代数的 $K$ 群，モーデル-ヴェイユ群の言葉で重要な解釈をもつと期待されている．この論説の言葉に翻訳すると，剛解析空間 $Z(M,V)$ において精密化された**古典的** $p$ モチーフの表す点は類似の解釈をもつだろうと期待される．これらの整数点での零点の存在から，$L$ 関数 $L(M,V)$ の零点集合の**残り**のどれくらいが “予測” できるだろうか？ この問題をより正確に問うために，剛解析空間 $Z(M,V)$ の成分が，その成分上の精密化された古典的 $p$ モチーフを表す点からなる部分集合の剛解析的ザリスキー閉包([Co-M] の 1.2 節参照)であるとき，その成分は**古典的に可視**であると言おう．この意味で，“古典的に可視である” ような，大きい次元の($L$ 関数の零点集合の)成分を見つけることは興味深いことだろう．モチーフの $L$ 関数の零点集合のどれくらいが “古典的に可視である” かという問は，最近の 2 つの研究に(少なくともわずかだが)関係する．1 つ目にスースリン(Suslin)とヴォイェヴォドゥスキー(Voevodsky)の深遠な研究がある．彼等は，代数多様体のねじれ係数エタールコホモロジー群**全体**を，関係する代数多様体上の**代数的サイクル**から構成された複体のホモロジー群として計算できることを証明した．2 つ目は [Cr-M] にある数値的な研究で，1 つの楕円曲線のシャファレヴィッチ(Shafarevich)-テイト群が他の楕円曲線のモーデル-ヴェイユ群に直接関係する(どのような意味かは同上の文献を見よ)かなりの数の例が与えられている．[M 3] も見よ．

**6. “スペクトル変動とスペクトルモノドロミー” の問題.** [Co-M] の固有曲線の(すなわち，同上の文献で構成された，階数 2 の $p$ モチーフの剛解析的変動の)任意の既約成分 $M$ は次の意味で，“スペクトル曲線(spectral curve)” として現れる：$p$ 進フレッシェ型空間の族と，その上の作用素(アトキン-レーナー作用素)の族が存在して，それらはスペクトル理論をもち，このデータがすべて剛解析的にパラメータ空間上変化する．したがってこれらの作用素

のスペクトルの集合も剛解析空間 $M$ の構造をもつ(詳しくは同上の文献を見よ)．この族のパラメータ空間は "重み空間" である．$p$ 進フレッシェ空間あるいは $p$ 進バナッハ空間の族上の(自然に生じる)作用素の族のスペクトルの変動として，$p$ モチーフの変動をどの程度広範囲にわたって表すことができるか? M. エマートンは素数 $p=2$ (!)の場合に研究し，傾きが 6 までの固有形式すべてを含む固有曲線の部分を $p=2$ の場合に明示的に記述した([E] を見よ)．そして，これらの固有形式はすべて，固有曲線のただ 1 つの成分の上にしかないことがわかった．特に，対応する作用素の族のスペクトルの**モノドロミー**がある程度あることがわかった．$p=3$ に対する L. スミスライン(Smithlein)の現在の研究は同様の現象を示唆している．$p$ 進フレッシェ型空間の族の任意のメンバー上の対応する作用素のスペクトルはこれらの場合離散的で無限個なので，パラメータ空間内の "ループ" をたどるときそのスペクトルのモノドロミーがかなり広範囲に存在する可能性が，少なくとも論理的にはある．$p$ モチーフの変動の $L$ 関数の零点集合 $Z(M,V)$ が(自然に) $p$ 進フレッシェ型空間上の作用素のスペクトルの変動として同様に得られる場合があるか?

(スペクトル・フローに関する [A] における議論を見よ．(自然に生じる)パラメータ表示された複素ヒルベルト空間上の作用素の族が，意味のある離散無限スペクトルのモノドロミーをもつ例は他に存在するか?)

階数 1 の $p$ モチーフとそれに伴う $L$ 関数の場合に議論してきた変動理論(すなわち類体論や円分体の岩澤理論)は，その貢献者の中でもクンマー，クロネッカー，ウェーバー，ヒルベルト，アルティン，岩澤健吉によって十分研究されてきた．しかし，そのような研究でさえ，ある重要な観点から見ると今なお終わってはいない．階数 2 に関しては，完成にはほど遠く，より高い階数に対してはその大部分が前人未踏である．

ペラン-リウ(Perrin-Riou) [P 2] は，($p$ で良い還元(good reduction)をもつ)任意の(古典的)モチーフに付随する $p$ 進 $L$ 関数の構成を明らかにする仕組みを与えた．彼女が与えた仕組みはある(一般には今なお予想である) "特殊な元の両立系(compatible system)" が入力されれば，条件付きで機能する[24]．

---

[24] (訳注) ペラン-リウの仕組みとは，専門的に言えば，$p$ 進補間写像のことで，オイラー系の元

この入力は，特別な状況では各々 “円単数”，“楕円単数” の系や，加藤の最近の研究([Scho] 参照)によって与えられる．ペラン-リウの理論はまた，これらの $L$ 関数に対応すると予想される類似の “岩澤加群” を与える．すでに述べたように，ペラン-リウの理論は入力するデータが特に単数，代数的サイクル，または代数的 $K$ 群の元で与えられる限り，モチーフが “古典的” であることを必要とする．したがって $p$ 進補間法に直接は適用できないが，彼女の定式化を，$p$ 進変動の状況に適合させ応用することは可能である．彼女の仕事と $p$ 進ベイリンソン，ブロック-加藤予想の解説記事については [Colm] を見よ．

さて，変動理論の状況での $p$ 進 $L$ 関数に戻ろう．階数 2 の $p$ モチーフに関しては，過収束 $p$ 進固有形式の $p$ 通常な族に対する肥田の独創的な理論があり，この族に関係する “2 変数 $p$ 進 $L$ 関数” の研究は完成している([Ki] 参照)．この構成を拡張して，グレン・スティーブンス(Glenn Stevens)は有限の傾きをもつ固有形式の剛解析的族の $p$ 進 $L$ 関数達を補間した(まだ今のところ未発表である)．スティーヴンスによる直線束 $\Lambda$ の構成は $p$ 進モジュラーシンボル(modular symbol)の直線束として与えられる．任意の階数 $n$ のモチーフに対する予想と結果は，肥田の論文：*On the search of genuine p-adic modular L-functions for GL(n)* ([H 2])を見よ．

しかし最後に，序文で述べた問を思い出そう．上述の $p$ 進変動のプログラムの**アルキメデス的**類似が期待できるか？ アルキメデス的理論では $\mathbf{Q}$ のガロア群は，それが $p$ 進理論で果たす役割のようなものは何も果たせない．それでも $\mathcal{H}^1_{\text{motivic}}$，$\Lambda$，$L$ と $Z$ の理論があるような自然な複素解析空間 $\mathcal{M}$ にモチーフを適当に精密化して埋め込んで，モチーフの古典的複素 $L$ 関数を研究することに期待を抱くことは可能なのか？

特に，このことは古典的尖点形式を連続的に変化する族に埋め込むことを必要とする．そういう理論の展望を確かめるとき，2 つの問題が自然に生じる：

**1．尖点形式は離散スペクトルに関係する固有ベクトルであるが，なぜ尖点形式が複素解析的変動を許すのか?**

---

(=特殊な元の両立系)を代入(=入力)して，$p$ 進 $L$ 関数の加群に類似の岩澤加群を与えるものである．

固有形式の連続的な族の存在は，スペクトルに関する通常の考察によれば，非コンパクト空間で研究しているか，あるいは，あるところで特異点を許した形式もしくは関数を研究していることの現れである．例えばアイゼンシュタイン級数の古典的族が与える連続スペクトルは，モジュラー曲線上の関連する直線束の切断としてアイゼンシュタイン級数を構成するとき，それらが尖点(cusp)で特異点を許すという事実と対応している．ヘッケ作用素の固有形式であると仮定しない，より一般の場合に関しては [B] を見よ．$p$ 進(**尖点**)固有形式の $p$ 進解析的族の存在は，これらの固有形式を $p$ 進剛解析的モジュラー曲線上の適当な直線束の切断と見たとき(カッツ(Katz)の古典的な定式化 [Ka] のように)，超特異な点[25]で，**真性**特異点を許すという事実に対応している．特にこれらの切断は，超特異な点での剰余円板(residue disc)上に延長できないかもしれない．我々が課す "制限" は，これらの真性特異点が悪すぎないことである：剛解析的切断として，固有形式は "過収束" しなければいけない．すなわち各超特異な点で剰余円板の中の円環領域へ拡張できなければいけない．奇跡的なことに，整数 $k \gg 0$ に対してそのような族の中の固有形式は(適当な)モジュラー曲線全体へ延長され，したがって "古典的" モジュラー固有形式なのである．アルキメデス的状況ではこのことに対する類似はあるか?

**2.** ***p*** **進解析における，(重み空間上の)剛解析的関数は整数重み** $\boldsymbol{k \gg 0}$ **上の値によって完全に決定されるが，これは複素領域では正しくない．** デニンガーが私に説明してくれたように，ラマヌジャンに関するハーディーの本 [Ha] の第 IX 章はこの問題に関連しているかもしれない．

## 参考文献

[A] Atiyah, M.: Topological aspects of anomalies, p. 633 in *Collected Works.* Vol. 5. Gauge theories. Oxford Science Publications. The Clarendon Press. Oxford University Press, New York, 1998.

[A-V] Amice, Y., Vélu, J.: Distributions $p$-adiques associées aux séries de Hecke, pp. 119-131 in *Journées Arithmétiques de Bordeaux , 1974* Astérisque, **24-25** (1975)

[25] (訳注) 超特異な点(supersingular point の訳)はモジュラー曲線(大雑把に言うと楕円曲線のモジュライ空間)上の超特異楕円曲線に対応する点のこと．

[B] Bruggeman, R.: *Families of Automorphic Forms*, Birkhäuser, Basel, (1994)

[B-Z] Burde, G., Zieschang, H.: *Knots*, de Gruyter, Berlin (1985)

[C-P] Coates, J., Perrin-Riou, B.: On $p$-adic $L$-functions attached to motives over $\mathbf{Q}$, pp. 23-54 in *Algebraic Number Theory in honor of K. Iwasawa*, Adv. Stud. Pure Math. **17** (1989)

[C] Coleman, R.: $p$-Adic Banach spaces and families of modular forms, Invent. math. **127** (1997) 417-479

[Co-M] Coleman, R., Mazur, B.: The Eigencurve, pp. 1-114 in *Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry,* (eds.: A.J. Scholl, R.L. Taylor), London Math. Soc. Lecture Notes Series **354**, Cambridge Univ. Press Cambridge, UK (1998)

[Colm] Colmez, P.: Fonctions $L$ $p$-adiques, Séminaire Bourbaki, exp. no. 851, November 1998 (to appear)

[Cr-M] Cremona, J., Mazur, B.: Visualizing elements in the Shafarevich-Tate group, to appear in the Journal of Experimental Mathematics. [This article also can be downloaded as dvi or ps files from Cremona's homepage: http://www.maths.ex.ac.uk/˜cremona/papers/visual.dvi or http://www.maths.ex.ac.uk/˜cremona/papers/visual.ps]

[D] Deninger, C.: Motivic $L$-functions and regularized determinants, pp. 707-744 in *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55, Part 1** (eds: U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre) A.M.S., Providence, RI (1994)

[E] Emerton, M.: 2-adic eigenforms of minimal slope, PhD thesis, Harvard University, 1997

[F 1] Fontaine, J.-M.: Sur certains types de représentations $p$-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Annals of Math. **115** (1982) 529-577

[F 2] Fontaine, J.-M.: Cohomologie de de Rham, cohomology cristalline et représentations $p$-adiques, pp. 86-108 in *Algebraic Geometry; Tokyo-Kyoto*, Lecture Notes in Math. **1016** Springer-Verlag, Heidelberg (1983)

[F 3] Fontaine, J.-M.: Valeurs spéciales des fonctions $L$ des motifs, exposé **751**, pp. 205-250 in *Séminaire Bourbaki, Volume 1991/1992*, Astérisque **206** (1992)

[F 4] Fontaine, J.-M.: Représentations $p$-adiques semi-stables, Exp. III: pp. 113-184 in *Périodes p-Adiques,* Astérisque **223** (1994)

[F-I] Fontaine, J.-M., Illusie, L.: $p$-adic periods: a survey, pp. 57-93 in the *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry,* Hindustan Book Agency, New Delhi (1993)

[F-M] Fontaine, J.-M., Mazur, B.: Geometric Galois Representations, pp. 47-78 in *Elliptic Curves, Modular Forms, & Fermat's Last Theorem,* International Press, Cambridge, MA (1995)

[G-M] Gouvêa, F., Mazur, B.: On the Zariski-density of modular representations, in "Computational perspectives on number theory: Proceedings of a conference in honor of A.O.L. Atkin" AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **7**, Providence, RI (1998)

[G-F] Grauert, H., Fritsche, K.: *Several Complex Variables,* Springer-Verlag, Heidelberg (1976)

[Gr 1] Greenberg, R.: Iwasawa theory for $p$-adic representations, pp. 97-137 in *Algebraic Number Theory in honor of K. Iwasawa*, Adv. Stud. Pure Math. **17** (1989)

[Gr 2] Greenberg, R.: Iwasawa theory for motives, pp. 211-234 in *L-functions and Arithmetic*, Proc. of the Durham Symposium, LMS Lecture Notes Series, **153** Cambridge Univ. Press, London and New York (1991)

[Gr 3] Greenberg, R.: Iwasawa theory and $p$-adic deformations of motives, pp. i93-224 in *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55, Part 2** (eds: U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre) A.M.S., Providence, RI (1994)

[Gr 4] Greenberg, R.: Elliptic curves and $p$-adic Deformations, pp. 101-110 in Centre de Recherches Mathématiques Proceedings and Lecture Notes **4** (1994)

[Ha] Hardy, G.H.: *Ramanujan,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1940)

[H 1] Hida, H.: *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series,* London Math Soc. Student Texts **26**, (1993)

[H 2] Hida, H.: *On the search of genuine p-adic modular L-functions for* GL($n$), Mémoires de la Société Mathématique de France **67** (supplement to volume **124** fasc. **4** of the Bulletin of the Soc. Math. de France) (1996)

[Ka] Katz, N.: $p$-adic properties of modular schemes and modular forms, pp. 69-190 in *Modular Functions of One variable III* **350** Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg (1973)

[Ki] Kitagawa, K.: On standard $p$-adic $L$-functions of families of elliptic cusp forms, pp. 81-110 in *p-Adic Monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture,* (eds.: B. Mazur, G. Stevens) Contemporary Mathematics **165** A.M.S., Providence, RI (1994)

[L-M] Lubotzky, A., Magid, A.: *Varieties of representations of finitely generated groups,* Memoirs of the A.M.S. **58** (1985)

[Mac] Maclane, S.: *Homology* Academic Press, New York, Springer-Verlag, Heidelberg (1963)

[M 1] Mazur, B.: Deformation theory of Galois representations, pp. 243-311 in *Modular Forms and Fermat's Last Theorem,* (eds.: G. Cornell, J. Silverman, G. Stevens), Springer-Verlag, New York (1997)

[M 2] Mazur, B.: An "infinite fern" in the deformation space of Galois representations, Collectanea Mathematica **48** 1-2 (1997) 155-193

[M 3] Mazur, B.: Visualizing elements of order three in the Shafarevich-Tate group, to appear in the Asian J. of Math.

[M-T-T] Mazur, B., Tate, J., Teitelbaum, J.: On $p$-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. math. **84** (1986) 1-48

[M-W] Mazur, B., Wiles, A.: Class fields of abelian extensions of **Q**, Invent. math. **76** (1984) 179-330

[Mot] *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55, Parts 1** and **2** (eds: U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre) A.M.S., Providence, RI (1994)

[P 1] Perrin-Riou, B.: Représentations $p$-adiques ordinaires, Exp. IV: pp. 185-220 in *Périodes p-Adiques,* Astérisque **223** (1994)

[P 2] Perrin-Riou, B.: Fonctions $L$ $p$-adiques des représentations $p$-adiques, Astérisque **229** (1995)

[R] Riley, R.: Nonabelian representations of 2-bridge knot groups, Quart. J. Math. Oxford **35** (1984) 191-208

[Sa] Saito, T.: Modular forms and $p$-adic Hodge theory, Invent. math. **129** (1997) 607-620

[Schn] Schneider, P.: Motivic Iwasawa theory, pp. 421-456 in *Algebraic Number Theory in honor of K. Iwasawa*, Adv. Stud. Pure Math. **17** (1989)

[Scho] Scholl, A.: An introduction to Kato's Euler systems, pp. 379-460 in *Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry,* (eds.: A.J. Scholl, R.L. Taylor), London Math. Soc. Lecture Notes Series **354**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1998)

[Schu] Schubert, H.: Knoten mit zwei Brücken, Math Zeitschr. **65** (1956) 133-170

[Se] Serre, J.-P.: *Corps Locaux,* Hermann, Paris (1962)

[T] Tkhang, Le Ty Kuok: Varieties of representations and their cohomology-jump subvarieties for knot groups, Russian Acad. Sci. Sb. Math **78** (1994) $n^o$ 1 187-209

[V] Vishik, M.M.: Nonarchimedean measures connected with Dirichlet series, Math USSR Sbornik 28 (1976) 216-228

[W] Washington, L.: *Introduction to Cyclotomic Fields,* Springer-Verlag, New York (1982)

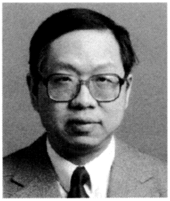
**■謝辞**　翻訳に際して多くの方からご教示いただきました．特に，落合理(大阪大学)，斎藤毅(東京大学)，森下昌紀(金沢大学)の各氏に深く感謝します．また，伊藤浩行(広島大学)，黒木玄(東北大学)，都築暢夫(広島大学)の各氏からもご助言を賜りました．ここに感謝の意を表します．

# 幾何と解析の展望

## Review of Geometry and Analysis

S. -T. ヤオ

●訳：納谷 信（名古屋大学）



【著者紹介】

**丘成桐** (*Shing-Tung Yau*)

1949年中国の広東省に生まれる．
1969年香港の中文大学を卒業，その秋にカリフォルニア大学バークレー校に入学し，1971年博士号を取得．
プリンストン高等研究所にて1年間研究活動を行なった後，ニューヨーク州立大学，スタンフォード大学を経て，1980年にプリンストン高等研究所教授となる．
1976年に代数幾何と微分幾何にまたがる予想であるカラビ予想を解決して一躍有名となり，さらに一般相対性理論の正質量予想の解決，実および複素モンジュ-アンペール方程式に対する貢献により，1982年ワルシャワで開かれた国際数学者会議にてフィールズ賞を受賞．
1988年にハーバード大学教授となり，現在にいたる．
アメリカ数学会よりヴェブレン賞(1981)，スウェーデン王立アカデミーよりクラフォード賞(1993)を受賞．

この論説*では，筆者が幾何学および関連する分野において重要と考える事柄について議論する．

ギリシャの数学者の時代より，幾何学は常に自然科学の中心に位置し続けてきた．自然科学者は自然現象を幾何学の言葉を用いて説明することに抗うことはできない．実際，幾何学の対象を自然の一部と見なすのが適当である．事実上，幾何学におけるすべての華麗な定理は古典的あるいは現代的な物理学に応用を見出してきた．幾何学の将来を理解するには過去において何が知られていたかを振り返ることはおそらく有意義であろう．明らかに，私が重要と考えることを他の人も重要と考えるとは限らない．また，現在流行していることが将来にわたってもそうであるとは限らないということも常に心に留めておくべきである．

理論は，我々が幾何学の基本的構造あるいは美しさを理解するのをその結果が助ける場合に限って成功したものと判断され得る．

我々は主題をいくつかのカテゴリーに分けるが，この分け方は人工的であり，各節の展開は他の節に大きく依存する．

## I　部分多様体

古典幾何における多くの非常に重要な問題が解決されずに残されている．3次元ユークリッド空間における曲面の記述は，コンピュータ・グラフィックスやデータの圧縮といった主題において重要となっている．また，最近の映画の制作においても重要な役割を果たしている．

ガウスの時代に始まって [62]，幾何学者は常に，曲面の内在的な内部計量構造と曲面の器の空間における外在的幾何の間の関係に興味をもってきた．以下の節においていくつかの重要な進展について議論することにする．

* この原稿をタイプしてくれたウラジミール・フレンケルと原稿を編集し文献を調べてくれたジョン・ロフティンに感謝したい．また，意見を寄せてくれたクロード・ルブルン，ボング・リアン，ガング・ティアン，ロバート・カスナーおよびマッケンジー・ワンにも感謝したい．この研究は DOE 助成金 DE-FG02-88ER25065 による援助を受けた．

## I.1　曲面の等長的埋め込み

3 次元空間への埋め込みによって実現され得る曲面上の内在的計量を特徴付けることは，重要でよく知られた問題である．ミンコフスキー [150] は，任意の凸多面体がそのように実現できることを証明することにより，この問題について最初の大きな進展をなしとげた．正曲率をもつ滑らかな曲面に対してワイル [218] が最初の重要な評価を与えたことに由来して，この問題はワイルの問題とよばれる．H. レヴィ [121] は実解析的な場合にこの問題を解き，ポゴレロフ [167] とニーレンバーグ [160] は滑らかな場合にこの問題を解決した．P. グアンと Y.Y. リーによる最近の研究 [83] もある．

ワイルの問題を解くことができる重要な理由は，その解が一意的である — コーン-フォッセン [46] とポゴレロフ [166] の定理 — ということである．ここでの一意性は，曲面の等長的埋め込みが他の任意のそれと 3 次元空間における合同変換によって関係していることを意味する．そのような大域的剛性定理を凸でない曲面に対して証明することは困難である．A. D. アレクサンドロフ [1] は，次に扱いやすい場合として曲率の正の部分の積分が $4\pi$ である場合を研究し，実解析的な計量に対して剛性を証明した．ニーレンバーグ [161] は滑らかな場合を解決するために美しい試みを行った．ニーレンバーグの議論は，曲面上に閉じた漸近線が高々1 つしか存在しないことが証明できれば問題の解決をもたらすだろう．曲面上の漸近線の振る舞いを理解することは今なお顕著な問題である．漸近線は，等長的埋め込みの問題に対する特性曲線であるので，負曲率をもつ曲面に対する大域的な等長的埋め込みの問題に対して基本的に重要である．負曲率をもつ曲面に対する等長的埋め込みの問題は，非常に面白い非線型双曲型方程式の問題である．しかしそれゆえに，そのような曲面に対する大域的な存在定理を証明することは非常に困難である．実際，有名なヒルベルト-エフィモフの定理は，曲率が負の定数によって上から押さえられた完備曲面は 3 次元ユークリッド空間に等長的に埋め込めないと主張している [54]．

曲率が適切に減衰するという仮定の下で，ホン [96] によって重要な存在定理が証明されている．エフィモフの定理の明解で定量的な証明を与えることは挑戦的な問題である．言い換えれば，半径 $r$ の測地円板で，その曲率が $-1$

以下かつ中心において $-1$ に等しいものが与えられたとする．この測地円板を $\mathbb{R}^3$ に，第 2 基本形式が与えられた定数によって押さえられるように埋め込むことを考える．これが可能であるような $r$ の最大値は何であろうか？

たとえ計量が実解析的であっても，一般のコンパクト曲面に対する大域的剛性は正しくない．一方，合同変換から生じるもの以外に，$\mathbb{R}^3$ のコンパクト曲面の等長的埋め込みの連続的な族が存在するか否かは，古典幾何における重要で際だった問題である．

R. コノリー [49] と D. ブリーカー [15] は凸多面体の場合にこの剛性予想に対する美しい反例を与えた．彼らの手法を改良して滑らかな例を与えることはできそうにない．閉曲面の等長的変形に対する(外在的な)不変量が存在するはずである．そのような不変量は有限個しかなく，よって等長的変形の空間は有限次元になると期待される．ブリーカーの例によれば，そのような曲面によって囲まれる領域の体積は不変量ではあり得ない．これらの多面体の例を区分的に滑らかな例に一般化し，変形が辺の動きとどのように関係するかを理解することは可能であろう．

また，コーン-フォッセン [47] は，閉曲面に対する無限小剛性の理論を展開している．関わってくる方程式は線型であり，したがってより扱い易い．しかし，楕円型になるのは曲率が正の場合に限られており，それゆえ曲率が符号を変える場合にこの方程式を理解することは困難な問題である．

ある閉曲面に対しては，自明でない 1 階の等長的変形が存在することが知られている．そのような曲面がどのように特徴付けられるかという問題が残っている．これは大域的な曲面上の混合型の方程式に対する自然な一意性の問題である．

もちろん，以上の問題のすべてを開曲面に対して問うことも可能である．カルタン [35] はすべての実解析的曲面が局所的に $\mathbb{R}^3$ に等長的に埋め込めることを証明した．滑らかな曲面に対しては問題ははるかに難しい．C.S. リン [137] の重要な定理によれば，非負の曲率をもつ滑らかな曲面は局所的に $\mathbb{R}^3$ に等長的に埋め込める．彼は曲率の勾配ベクトル場が零でない場合にも問題を解決している [138]．そのような仮定が落とせるか否かは未解決の問題として残されている．

境界をもつコンパクト曲面の等長的埋め込みに対する境界値問題を 2 通り

の異なる仕方で定式化することができる．1つはノイマン問題であり，境界の平均曲率が与えられた関数 $H$ になることを要求する．(明らかに $H^2 \geq K$ を要求する.) もちろん，境界の像がある曲面の部分集合であることを要求してもよい．いま1つはディリクレ問題であり，境界の像が与えられたジョルダン曲線に一致することを要求する．最初の問題では，曲率が正ならば平均曲率は有界になり正則性が保証される．後者の問題では，与えられた曲線のみたすべき重要な必要条件として，その第2基本形式の長さが曲面の境界の測地的曲率を上から押さえていなければならない．ホン [95] はこの問題に関して重要な進展をなしている．

$\mathbb{R}^3$ 内の境界をもたない閉曲面に対しては，その内在的計量について多くの制約がある．最初の重要な制約は，曲率がある点で正になること，および $\int_\Sigma K^+ \geq 4\pi$ が成立することである．ここで，$K^+ = \max(K, 0)$ である．

ニーレンバーグ [161] は，$\int_\Sigma K^+ = 4\pi$ であれば，集合 $\{K < 0\}$ の各連結成分は有界であり，かつ2つの凸で閉じた平面曲線に沿って平行な平面に接することを証明した．各閉曲線の全測地的曲率は $2\pi$ に等しくなければならない．この事実は $\mathbb{R}^3$ に等長的にはめ込まれ得る計量に対する制約を与える．一般に，集合 $\{K > 0\}$ および $\{K < 0\}$ の位相について何か制約はあるだろうか？

$\Sigma$ が $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているならば，それは領域 $\Omega$ を囲む．$\Sigma$ のスペクトラムと $\Omega$ のスペクトラムを関連付けることは興味深い問題である．簡単な議論により，$\Omega$ の体積が $\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{Area}(\Sigma)\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ によって上から押さえられることが分かる．ここで，$\lambda_1$ は $\Sigma$ の第1固有値である．この主張とカリヴァー [112] の研究から，$\dfrac{\mu_i(\Omega)^{3/2}}{\lambda_i(\Sigma)\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}} \geq C_g > 0$ が従う．ここで，$\mu_i(\Omega)$ は $\Omega$ の $i$ 番目のディリクレ固有値であり，$\lambda_i(\Sigma)$ は $\Sigma$ の $i$ 番目の固有値である．また，$C_g$ は $\Sigma$ の種数のみに依存する定数である．$C_g$ の最良の値は何か？ また，そのような最良の値を実現する曲面があるだろうか？ 集合 $\{\mu_i(\Omega)\}$ は $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ を決定するだろうか？ その逆はどうか？ 曲面 $\Sigma$ が $\mathbb{R}^3$ に等長的に埋め込まれるならば，$\{\lambda_i(\Sigma)\}$ はおそらく何らかの制約を受けるだろう．その制約とは何か？ $\{\lambda_i(\Sigma)\}$ の漸近挙動は $\Sigma$ の測地流の力学に密接に関連していることが知られている．測地流の力学は制約を受けるだろうか？ $\Sigma$ はい

たるところ非正曲率をもち得ないので，埋め込まれた閉曲面 $\Sigma$ の測地流は非エルゴード的になるべきであろうか？ もし非エルゴード的であるならば，測地流の不変領域を曲面の外在的な幾何によって記述することができるだろうか？ 測地流のエントロピーは何か？

## I.2 種々の幾何学

直交群よりも大きな群の下で不変な，曲面の性質を考察することもできる．そういった群としては，それぞれ $\mathbb{R}^3$ に作用する特殊線型群，共形変換群，射影変換群がある．これらの群の下で不変な曲面 $\Sigma$ の性質を求めることになる．それらはそれぞれアフィン幾何，共形幾何，射影幾何とよばれる．これらの幾何に対する 多くの興味深い問題が解答を待っている．

アフィン幾何に対しては，重要な不変量としてアフィン計量(これは第 2 基本形式をガウス曲率の 4 乗根で割ったものである)とアフィン法ベクトルの概念がある．曲面のアフィン法ベクトルが 1 点を焦点とするときに，曲面はアフィン球面とよばれる．そのような曲面は，カラビ [23, 24]，カラビ-ニーレンバーグ [26]，チェン-ヤオ [39, 40] によって詳しく調べられた．これらの仕事から，任意の凸錐に対して，それに漸近的な完備アフィン球面が存在することが明らかになっている．そのようなアフィン球面を効率的に構成する方法が見つかれば非常に面白い．擬正則関数に関する表示を見出すことができるだろうか ([215] を見よ)？ 最近，ジョン・ロフティンは，彼のハーバードでの学位論文において，リーマン面の 3 重標準直線束の正則切断を用いてアフィン球面を構成する方法について議論した．そのような球面が関数の零点集合の形に書ける場合が沢山あるだろうか？（曲面 $xyz = 1$ は座標錘に漸近的である.）これは錘が多面体錘の場合にとくに興味深い．これらの場合にアフィン計量を計算することができるだろうか？ もちろん同様の問題を高次元の場合に問いかけることもでき，それは線型最適化問題と関係してくる [106].

今のところ，進展の大半は曲面の凸性を仮定している．曲面が負曲率をもつ場合に何が起こるだろうか？ 引き起こされる計量が完備で負曲率をもつア

フィン球面はどのようなものか？

アフィン極大曲面という概念があり，それは4階の楕円型方程式によって定義される(例えば [25] を見よ)．したがって，曲面の境界と境界に沿っての法ベクトル方向を指定することができる．境界を三角形と指定した場合に，アフィン極大曲面に対する境界値問題を解く有効な方法があるだろうか？ $\mathbb{R}^3$ 内に多面体を固定したとき，多面体のすべての辺を通る $C^1$ 曲面を，各面において曲面がアフィン極大であるように構成することを試みてもよい．また，そのようなすべての $C^1$ 曲面の中で，最大の全アフィン面積をもつものを見つけようと試みてもよい．最近，トゥルディンガー-ワン [211] はアフィン極大曲面に対するベルンシュタイン問題を解決した．将来，より多くの研究がアフィン極大曲面に対してなされることが望まれる．

筆者とチェンが論文 [40] において議論しているように，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内のアフィン球面のアフィン計量は，ルジャンドル変換によって $\mathbb{R}^n$ 内の凸領域上の射影不変な計量になる．したがって，$\mathbb{R}^n$ 内の超曲面の射影不変な性質を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内のアフィン球面の超曲面の性質に関連付けることは興味深い．

$\mathbb{R}^3$ 内の閉曲面が(計量的に)無限小剛性をもつならば，その射影変換による像も無限小剛性をもつことが知られている．この主張は，閉曲面の大域剛性に対しても正しいか？ 射影幾何あるいはアフィン幾何に関して剛性問題を定式化することが可能だろうか？

$\mathbb{RP}^3$ 内の代数曲面は明らかに重要な曲面である．しかしながら，それらについては実質的に何も知られていない．その連結成分の個数についていくらかの情報が存在する程度である．一方，その幾何は明らかに特殊である．臍点(せいてん)の個数，閉測地線の個数，閉漸近線の個数，正曲率をもつ領域の位相，そしてラプラシアンの固有関数は，すべて曲面の定義多項式に関連する興味深い不変量である．一方では，我々は代数幾何学から学んだ技法と情報をもっている．曲面を複素化し，それらの間のトポロジーや接続関係に関連する情報を得ることができる．他方では，これらの曲面の古典的な幾何を古典的な方法 — 偏微分方程式あるいは実射影幾何から得られる接続 — を用いて理解したい．これら2つのアプローチを結び付けることが重要である．曲面を複素化すると，大抵の場合に負のスカラー曲率をもつ完備なケーラー-アインシュタイン計量を見つけることができる [204]．この計量は反正則的な対合によっ

て不変であるから，曲面上に標準的な計量が定まる．(ここで標準的とは，1つの代数曲面から別の曲面への非特異で射影線型な全単射があるとき，それが標準的計量の等長写像であることを意味する.) 実代数多様体に関するいくつかの定理は標準的計量を用いて証明することができる．この標準的計量は，ユークリッド空間から曲面に引き起こされる計量とどのように関係付けられるであろうか？

複素代数幾何においては，代数多様体内の代数曲線を理解することが非常に重要である．実代数曲面において，実代数曲線はどのような役割を果たすだろうか？ 実代数曲線の位相構造と幾何はどのようであろうか？ また，実代数曲線の連結成分の個数や測地的曲率をその定義多項式の次数によって上から評価することができるだろうか？

おそらくすべての閉曲面を次数の大きい実代数曲面によって近似することが可能である．与えられた曲面を近似するのに必要な最小の次数は何であろうか？ 言い換えれば，$\varepsilon > 0$ が与えられたとき，与えられた曲面からのハウスドルフ距離が $\varepsilon$ より小さい代数曲面の最小の次数は何か？ それを曲面の適当な計算可能な幾何学的量(例えば，曲面の平均曲率の $L^2$ ノルム)によって評価できるだろうか？ 与えられた整数より次数が小さい代数曲面の平均曲率の $L^2$ ノルムを最小化するとき，どのような代数曲面が得られるか？

実代数曲面は自然な特異点の豊富なクラスを提供してくれる．特異点の近くでの主曲率の振る舞いを調べることは興味深い．そのような点の近くでのラプラシアンの固有関数の振る舞いもまた非常に興味深いだろう．

曲面が実代数的集合によって定義されているとき，それに付随する(特異点をもつ)葉層構造が存在する．そのような連続的な族を研究することは，代数曲面を理解する上で大きな助けになろう．

逆に，(特異点をもつかもしれない)葉層構造を定義する代数的1形式があるとき，閉じた葉を見つけ，そのような葉の個数を評価することは面白い問題である．そのような葉はどのような場合に代数的だろうか？

## I.3 $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面

文献で研究されている曲面の中でも，いくつかとくに重要ものがある．それらの大半が変分法によって得られる．

最初の主要なクラスは極小曲面である．これらは平均曲率が零に等しい曲面である．$\mathbb{R}^3$ 内の閉曲線が与えられたとき，それを境界にもつ曲面のなかで面積が最小のものをさがす．曲面のトポロジーを何らかのクラスに限定してもよい．例えば，考えるすべての曲面が種数 $g$ をもつと仮定してもよい．すると，面積の最小値は種数に依存する数 $A_g$ になる．一般に，$A_g \geq A_{g+1} \geq \cdots$ が成り立つ [147]．境界曲線が滑らかであるとき，ある $g_0$ に対して $A_{g_0} = A_{g_0+1} = \cdots$ が成り立つというハルト-サイモン [88] の有名な定理がある．しかし，$g_0$ に対する有効な評価は知られておらず，そのような評価を見つけることは挑戦的な問題である．

$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな単純閉曲線が無限個の極小曲面の境界になり得るかどうかは知られていない．（トミ [209] によれば，曲線が実解析的ならばそのようなことは起こり得ない.）与えられた閉曲線(あるいは閉曲線の集合)を境界にもつすべての極小曲面を見つける一般的な手続きが存在するだろうか？ 与えられた曲線を境界にもつ不安定な極小曲面を書き下すことは未だに難しい問題である．（面積最小曲面を書き下す有効な方法も知られていない.）与えられた滑らかな曲線の集合を境界にもつ安定あるいは不安定な極小曲面の種数がどの程度大きくなるかは明らかでない．いくらでも大きくなり得るのだろうか？

極小曲面の定量的な振る舞いに関する多くの基本的な問題が未解決のまま残されている．1つのよく知られた問題は，等周不等式の最良の定数を問うものである．すなわち，$A$ を面積，$L$ を境界の長さとするとき，$\frac{4\pi A}{L^2}$ の最良の上界は何であろうか？ 自然に予想される値は 1 である．これは境界がジョルダン曲線であれば正しいことが分かっている(リー-シェーン-ヤオの論文 [129] を見よ)．この問題は，極小曲面に対するソボレフ不等式の最良の定数を見つける問題と関係している．この問題は $L^1$ 版であるが，$L^p$ 版を見出すことも興味深い．

極小曲面の第 1 ノイマン固有値の下からの評価および第 1 ディリクレ固有

値の上からの評価を見つけることは非常に興味深い問題である．

1 つの閉曲線に対する存在問題は解けているが，複数の境界成分に対する問題はそれほど明らかにされていない．また，境界が特異である場合は，ほとんど何も知られていない．

$\mathbb{R}^3$ 内の $S^2$ に同相な単体複体の 1 次元骨格が与えられたとき，$S^2$ から $\mathbb{R}^3$ へのこの骨格を通る写像の像の面積を最小化することが考えられる．ただし，像の面積は重複度 1 で計算するものとする．どのようなタイプの特異点が生じ得るだろうか？ 例えば，四面体の骨格に同相な 1 次元の集合に対して，この骨格上の錐に同相な極小集合を見つけることができるか？

$\mathbb{R}^3$ 内の完備で固有に埋め込まれた極小曲面の位相的な分類は，ミークス，ホフマン，ホルヘ，カルヒャー，ローゼンバーグその他の人々の努力によって完成に近づいている（例えば [57, 94, 146] を見よ）．しかし，対応する共形構造を第 2 基本形式に随伴する 2 次微分とともにどのようにして分類すればよいかは未だ明らかでない．分類の問題以外にも，これらの曲面上の解析に関する多くの興味深い問題が未解決である．

例えば，$\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面上で定義された調和関数に関する問題を問うことができる．もし調和関数が正ならば，曲面の各エンドで定数に漸近的であろうか？ もし調和関数 $U$ が高々多項式的増大度をもつならば，定数 $\alpha$ で

$$0 < \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{U(x)}{|x|^\alpha} < \infty$$

となるものが存在するか？ そのような $\alpha$ の集合は無限集合か？ また，整数の集合に漸近的か？ 各 $\alpha$ に対して，上のような漸近挙動をもつ調和関数のなす有限次元ベクトル空間が存在するであろう．多項式的増大度をもつ調和関数とそれらの $|x|^m$ との積全体のなす空間は，適当な重み付きソボレフ・ノルムに関して，多項式的増大度をもつ関数全体のなす空間を張るであろう．

完備で固有に埋め込まれた極小曲面のラプラシアンのスペクトルは，$\mathbb{R}^2$ のそれとあまり異ならないだろう．さらに，連続スペクトルや近似的な固有関数がどのように記述できるかを明らかにしたい．

作用素 $-\Delta + \|x\|^2$ のスペクトルは離散的であるので，調べてみるとおそらく面白いだろう．これは $\|x\|^2$ の臨界点やこれらの臨界点を結ぶ古典経路に関係しているはずである．（古典経路とは，ラグランジアン $\int |\nabla u|^2 + \int \|x\|^2 u^2$

に関して臨界的な経路のことを言う.)

随伴極小曲面の構成を用いて，極小曲面の非自明な連続的変形を構成することは容易である．しかし，すべてのそのような例は自己交叉をもっている．埋め込まれた極小曲面の非自明な連続的変形を構成することは可能だろうか?

大抵の完備で固有にはめ込まれた極小曲面は漸近的に平坦か漸近的にカテノイド的である．これらの曲面上の測地流の力学を理解することは極めて興味深い：いつ測地線が無限遠から発生するか？ それらはどのように散乱されるか？

球体に固有にはめ込まれた完備極小曲面が存在することが知られている [158]. これらの曲面の幾何学的性質はどのようなものか？ 埋め込みになることがあるか？ 曲率は $-\infty$ に発散するので，このような曲面のエンド付近での精密な漸近挙動を見出すことは重要である．ラプラシアンのスペクトルは離散的だろうか？

## I.4　端的な閉曲面

$\mathbb{R}^3$ 内の最も単純な端的閉曲面は，与えられた体積を囲む曲面の中で面積を端的にするものである．このような曲面は一定の平均曲率をもつ．ウェンテ [217] は，平均曲率一定のはめ込まれたトーラスが存在するかという古典的問題に肯定的解答を与えた．その後より多くの例が構成されてきたが，平均曲率一定の閉曲面の分類は未だ完成にはほど遠い.

ウェンテの曲面においては，曲率線が平面曲線になっている．自己交叉する曲率線の組合せ的な構造，正曲率をもつ領域の位相構造，および漸近線が理解できれば面白い.

いま 1 つの重要なクラスは汎関数 $\int H^2$ に関して端的な曲面である．レオン・サイモン [186] は，この汎関数の最小値を実現するトーラスの存在を証明するとともに，種数が 2 以上の曲面に対する存在定理の証明に向けて重要な考察を行った．もちろん，そのような曲面に対して $\int H^2$ の可能な値を実際に求めることができれば大変面白い．とくに，トーラスに対する $\int H^2$ の最小値は $2\pi^2$ であろうというウィルモアの予想 [219] が解けることになる.

ウィルモアの問題の PL 的類似もある(スー-カスナー-サリヴァン [99] を見よ)が，この場合でさえも最小値を与える解の存在をどのようにして証明すればよいかは未だ明らかでない.

3 次元多様体において，汎関数

$$\sqrt{A}\left(1-\frac{1}{16\pi}\int ||H||^2\right)$$

($A$ は曲面の面積を表す)を端的にする問題を考えることができる．定数倍を除いて，この量は曲面のホーキング質量 [90] とよばれる．漸近的に平坦な 3 次元多様体内の端的曲面をどのように分類することができるだろうか？ そのような曲面は一般相対論において重要である．マリッサ・リウと筆者は，最近そのような準局所的質量の別の定義を与え，その正値性を証明することができた.

## I.5　曲面の変形

曲面を $\mathbb{R}^3$ において変形する仕方は多様である．曲面の内在的計量を保つ変形をどのようにして記述すればよいかという非常に興味深い問題にはすでに言及した．これらの変形を(合同変換の作用を除いて)調べるよい方法は何だろうか？ コンパクト曲面の境界を動かすとき，曲面の変形は有限次元の自由度を除いて決定できるだろうか？ 曲面の曲率が負になることを許すとき，これは難しい問題になる.

より一般の変形は，曲面の計量が第 2 基本形式に応じて変化することを許す変形である．言い換えれば，$X(t)$ を曲面の埋め込みの族とするとき，$\frac{d}{dt}\langle dX(t), dX(t)\rangle$ が $X(t)$ の第 2 基本形式によって定まる対称テンソルになることを要求する．そのような曲面の族の特異な挙動としてはどのようなものが期待されるだろうか？ ワイルの定理を考慮すると，この問題は凸曲面に対して問う方がずっと適切である．そのような変形の下で，曲面の凸性が保たれるための条件は何か？

ずっとよく知られた曲面の変形は，速度ベクトル $\frac{dX}{dt}$ が曲面の法ベクトルの何らかの関数倍に等しいとするものである．ここで関数はガウス曲率，平均曲率，あるいは平均曲率の逆数に適当に符号を指定したものでもよい．ハ

ミルトンやヒュースケン，その他の人々(例えば [85], [100] を見よ)によって美しい理論が展開されてきた．(平均曲率が正の曲面についてのヒュースケン-シネストラリの研究 [102] を除いては)特異点を完全に理解するには至っていない．特異点が生じた後に曲率流に何が起こるだろうか？

そのような曲面の変形の過程で，基本的な幾何学的量がどのように変化するかを観察することは大変興味深い．例えば，第 2 基本形式，測地線，臍点，ラプラシアンのスペクトル等はどのように振る舞うだろうか？

曲面の自然な変形によって生成される特異点は，自然界に生じる特異点の中でおそらく最も自然なものだろう．単純な変形に対しては，多分ある種の「特異点の解消」定理が存在して，特異点がどのようにして生成するかを理解する助けとなろう．典型的なやり方は方程式の解の「グラフ」を見ることであり，特異点は射影あるいは平面との交わりとして得られる．この種の構成を一般化して 3 次元空間における曲面の変形を理解することができるだろうか？

以上のような方法で定義される変形の他に，3 次元空間における曲面の波動がある．水滴，曲面波および振動膜を観察するとき，そこに美しい幾何学図形を見ることができる．そういった図形の形成を支配する方程式の理解には乏しいものの，これらの図形をどのように記述すればよいと期待できるだろうか？

振動膜に対しては，その波動は膜の固有関数展開によってよく近似されることが知られている．そのような近似をどのようにして説明すればよいか？振動膜に関係する方程式が 2 つある．1 つは $\frac{d^2X}{dt^2} = -HN$ ($H$ は曲面の平均曲率，$N$ は単位法ベクトルを表す)である．あるいは平坦なミンコフスキー空間内の時間的な極小超曲面を調べることも考えられる．いずれの場合にも，時間に関して大域的な超曲面の挙動についてはほとんど何も知られていない．線型な波動方程式に対しては，周知のように時間について周期的な波動がある．このことが上のような非線型な方程式に対して何を意味しているかは明らかでない．

## I.6 ユークリッド空間における曲面の表示

ミンコフスキーは $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を表示する最初の系統的な方法を与えた．彼は凸多面体の場合を扱って成功をおさめた [150]．一般に，ミンコフスキーの提案は，曲面の単位法ベクトルを原点を基点とするベクトルに平行移動することにより，曲面 $\Sigma$ を球面 $S^2$ に写像する(ガウス写像)というものである．曲面が狭義凸のとき，ガウス写像は 1 対 1 である．よって，曲面のすべての情報はガウス写像を通じて $S^2$ 上で表現することができる．ガウス曲率はとくに $S^2$ 上の関数として書くことができる．有名なミンコフスキーの問題は，$S^2$ 上の関数が与えられたとき，それをガウス曲率にもつ曲面 $\Sigma$ を再構成するというものである．与えられた曲率関数が滑らかなとき，曲面 $\Sigma$ も滑らかである．また $\Sigma$ は平行移動を除いて一意的である．これらの結果はポゴレロフ [167] とニーレンバーグ [160] によって証明された．

未解決の重要な問題がいくつかある．ミンコフスキーの問題を数値的な手段によって解く有効な方法は何であろうか？ 球面を離散化するとき，その離散化は曲率関数の値の分布に適合していなければならないことは明らかである．曲率関数の値が大きいところでは，そのような点の近傍により多くの頂点が存在すべきであろう．これらの点を選ぶ最良の方法はどのようなものだろうか？ 古典幾何の多くの応用において，$\Sigma$ 上での積分を考える必要がある．$S^2$ の離散化を通じて，$\Sigma$ の都合のよい離散化を，任意の滑らかな関数の積分がこれらの点での関数の値の和によって最もよく近似されるように与えることが可能だろうか？

ミンコフスキーの問題は曲面が凸で境界をもたない場合には十分に研究されている．一方，凸性あるいは境界なしという仮定をおとすとずっと難しい問題になる．

$\mathbb{R}^3$ 内の閉曲線 $\tau$ と $S^2$ の領域 $D$ で定義された正値関数 $K$ が与えられたとき，$\tau$ を境界にもつ凸曲面 $\Sigma$ で，そのガウス曲率が $\Sigma$ のガウス写像を通じて $K$ によって与えられるものがどのような条件の下で見つかるだろうか？(ずっと難しい問題は，与えられたガウス曲率と平均曲率をもつ 3 次元空間内の閉曲面を求める問題である．種数 0 の閉曲面は，その共形構造，ガウス曲率および平均曲率によって決定されることに注意しておく.) $K$ と $\tau$ はい

くつかの可解条件をみたす必要がある．まず，$\tau$ は何らかの凸曲面 $\tilde{\Sigma}$ の境界でなければならない．次に，$\frac{1}{K}$ の $D$ 上の積分は $\tau$ を境界にもつ面積最小曲面の面積よりも大きくなければならない．3 番目に，$D$ の面積と $2\pi$ との差は，$\tau$ の第 2 基本形式の長さの積分によって押えられていなければならない．これらがディリクレ境界条件の下でミンコフスキーの問題が解けるための可解条件のすべてであるかどうかが明らかにできれば面白いだろう．もちろん，$\partial\Sigma$ が与えられた閉曲面上にあることを要求することにより同様の問題を定式化することもできる．

ミンコフスキーの問題は，曲率が符号を変える場合には，閉曲面に対してでさえ難解である．曲面上の曲率が零に等しい部分が曖昧さを生み出すことは明らかである．おそらく，最初の考察においては $K$ の実解析性を仮定すべきであろう．ガウス写像はもはや 1 対 1 ではない．結果としてミンコフスキー・データは集合を値とする関数になる．一般的な点において，曲率関数の値はある位数をもつ有限集合である．この位数は $S^2$ の点によって定義される支持関数の値に従って与えられる．すべてが適切に定義された意味において実解析的ならば，このデータは閉曲面を決定するだろうか？

曲面を表示する 1 つの考えられる手続きは，曲面をある曲線の集合 $\{\tau_i\}$ に沿って多くの切片に分解することである．空間曲線 $\tau_i$ はその曲率と捩率によってパラメータ表示できる．$\tau_i$ を境界とする切片はそのミンコフスキー・データによってパラメータ表示できる．場合によっては，$\tau_i$ をガウス曲率あるいは平均曲率の零点集合として定義されるものにとることが自然かもしれない．この点については，おそらくグアン-スプラック [82] の技法が有用であろう．曲線の集合で重要なものとしては，他に共形構造から定まる双曲計量の測地線によって与えられるものがある．

$p$ を $\mathbb{R}^3$ の点とし，$p$ を通るすべての直線 $l$ の集合を考える．それらは与えられた曲面とある点で交わり，そこで幾何光学にしたがって反射される．この反射は何度でも続けることができる．このようにして $p$ を中心とする単位球面の各点に曲面の部分集合を対応させる写像が得られる．

この写像によって曲面の面積要素を引き戻すことにより，単位球面上の密度が得られる．この密度について何が言えるだろうか？ この密度は点 $p$ の選び方にどのように依存するだろうか？

曲面が閉かつ凸で，$p$ が曲面の内部にある場合にはこの問題に答えることができるはずである．$S^2$ 上の密度が与えられたとき，それを閉曲面によって実現することが可能だろうか？

同様に，曲面と交わらない平面 $L$ があるとき，$p$ を出て曲面によって反射された光線は $L$ と交わる．これによって $L$ 上の密度が得られる．この密度によって曲面がどの程度まで決定されるかが理解できれば面白い．曲面が凸ならば，$p$ あるいは $L$ の位置を動かすことにより，曲面を決定することができるだろう．曲面が凸でない場合には何が起こるだろうか？

## I.7　球面内の極小曲面

極小曲面と汎関数 $\int H^2$ に対する端的曲面は 3 次元多様体内の最も自然な特殊曲面である．$S^3$ においてこれらの曲面を分類するというのは理不尽な問題ではあるまい．これらの曲面の幾何学的不変量を評価するという問題も非常に興味深い．何年も前に，筆者は $S^3$ 内の埋め込まれた極小曲面の第 1 固有値は 2 に等しいと予想した．この問題は未だに未解決であるが，チョイ-ワン [43] によって進展がなされている．$S^n$ 内の極小超曲面のゼータ関数は何らかのよい挙動を示すだろうか？ これらのゼータ関数の数論的性質を見出すことができるか？ これらは通常の関数等式に類似したものだろうか？ ラプラシアンの行列式は特殊な値をとるであろう．

$S^3$ 内の閉じた極小曲面の非自明な連続変形が存在するか否かが分かれば面白い．そのような変形が存在しなければ，各種数に対して $S^3$ 内の極小曲面の個数は有限になる．それらを分類できるだろうか？ また，それらの面積を計算できるだろうか？

$S^n$ 内の極小曲面の研究は，それ自身の美しさの他に $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の極小部分多様体の孤立特異点の研究に関係している．$S^n$ 内の極小部分多様体上の錐は，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の孤立特異点をもつ極小部分多様体である．このように，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の極小部分多様体と $S^n$ 内の極小部分多様体の間には密接な関係がある．$S^n$ 内の極小部分多様体の固有関数は，対応する $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の極小部分多様体上の同時調和関数と関係している．同次性の次数 $\alpha$ は $S^n$ 内の極小部分多様

体の固有値と関係している．実際，固有値は $\alpha^2 + k\alpha$ によって与えられる．ここで，$k$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の極小部分多様体の次元である．この対応に関連して自然な問題がある．$\mathbb{R}^n$ 内の極小部分多様体上の調和関数のなす空間の次元はピーター・リー [128] とコルディング-ミニコッチ [48] によって評価されている．とくに，この評価は $S^n$ 内の極小部分多様体の固有値の重複度の面積による評価を与える．極小部分多様体が線型のとき，$\alpha$ は整数である．これは調和関数に対する除去可能特異点定理から従う．$\alpha$ はいつ有理数になるだろうか？ 極小部分多様体の面積に関する，$\alpha$ に対する妥当な制約条件を見出すことができるだろうか？ $\alpha$ が大きいとき，それは正の整数に漸近するが，そのときの誤差を評価することが可能だろうか？ 極小部分多様体の固有値の重複度はおそらく全測地的球面の場合に最大であろう．この主張を証明できるか？

論文 [130] において，ピーター・リーと筆者はリーマン面上の共形構造の共形面積という概念を導入した．これはリーマン面の固有値と密接に関係している．一般に，閉リーマン面上の共形構造が与えられたとき，$\sup \lambda_i A$ という数を対応させることができる．ここで，$\lambda_i$ は共形計量の第 $i$ 固有値であり，$A$ は面積である．N. カリバー [112] の結果により，この数には上限があり，それを実現する端的計量を見出すことができれば非常に面白いだろう．球面内の多くの極小曲面がそのような端的計量を与える．精密に関係付けることができるだろうか？ 共形面積はリーマン面のモジュライ空間上の関数を定めるが，その挙動はどのようなものか？

$S^n$ 内の埋め込まれた極小閉曲面でいかなる $S^{n-1}$ にも入っていないものに対して，曲面の第 $cn$ 固有値は 2 以上か？ ここで，$c$ は曲面の種数のみに依存する定数である．$c$ を評価することができるか？ また，種数によらない定数にとれるだろうか？ とくに，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る超平面は曲面を高々 $cn$ 個の連結成分にしか分割しないことになる．このことは，$S^3$ 内の非自明な埋め込まれた極小曲面は $\mathbb{R}^4$ 内の原点を通る超平面によって 2 つの連結成分に分割されるという主張の正当性を強化することになる．

## I.8 高次元空間内の部分多様体

多様体 $M^n$ の $\mathbb{R}^N$ への等長的埋め込みに関するジョン・ナッシュの基本的な仕事 [159] 以来，そのような埋め込みを理解することについてほとんど何も進展がない．$M^n$ の余次元が大きすぎて，意味のある剛性問題を設定することができないのである．(余次元が大きいことが，等長的埋め込みの存在を位相的方法によって証明する上で助けになる.) 等長的埋め込みを視覚的にとらえるには，変形が完全に記述できる埋め込みのクラスを見出す必要がある．多様体 $M^n$ が等長的に埋め込まれるユークリッド空間の次元の最小値は $\frac{n(n+1)}{2}$ であることが知られている．しかしながら，$n \geq 3$ の場合，$\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 内の $M^n$ に対して，剛性に関する意味のある大域的理論あるいは等長変形の理論は知られていない．($\mathbb{R}^{2n-1}$ 内の $M^n$ に対してはより多くの剛性定理が知られている.)

十分大きな $N$ に対して，与えられた多様体 $M^n$ から $\mathbb{R}^N$ へのすべての等長的埋め込みにわたって積分量 $\int H^2$ を最小化することが考えられる．この汎関数の臨界点は何か？ そのような埋め込みはどの程度剛性をもつか？

一般には，完備で非コンパクトな多様体 $M^n$ を平均曲率が有界になるように $\mathbb{R}^N$ に等長的に埋め込むことは不可能であろう．一方，リッチ曲率が下から押えられていればおそらく可能である．平均曲率が有界になるように多様体が埋め込めるための最良の条件は何か？ ミカエル-サイモンの結果 [149] により，そのような多様体に対しては適当な等周不等式が成立する必要がある．

より強く制約された問題として，完備で非コンパクトな多様体を $\mathbb{R}^N$ に極小部分多様体として埋め込むというものがある．曲面については，ワイエルシュトラスの表現公式を用いてそのような計量を特徴付けることが可能である．3 次元以上の場合については，計量が実解析的であること，リッチ曲率が非正であること，そして等周不等式および熱核に関するある不等式が成立すること [38] が，知られている制約条件のすべてである．(例えば，熱核のトレースは各点ごとに $\frac{C_n}{t^{n/2}}$ によって押えられる．ここで $n$ は極小部分多様体の次元である.) 何らかの極小部分多様体上に実現できる計量は，計量全体の空間の中で薄い集合をなすはずである．この集合をどのように記述することができるだろうか？ すべての非コンパクト多様体はユークリッド空間内の

完備な極小部分多様体に微分同相になるだろうか？ また，すべてのコンパクト多様体は球面内の極小部分多様体に微分同相であろうか？ 4 次元以上の場合には，極小部分多様体の具体例はほとんど知られていない．極小グラフでさえも分類されていない．

極小グラフは，ユークリッド空間上の極小部分多様体による葉層構造の葉であるという性質をもつ．逆に，すべての葉が極小部分多様体であるような $\mathbb{R}^n$ 上の葉層構造を分類できるだろうか？ そのような葉層構造の余次元が 1 ならばその葉は面積最小でなければならない．余次元 1 の特異点をもたない極小葉層構造は必然的にグラフであろうか？ ある種の特異点をもつ極小葉層構造が沢山存在する．例えば，1 つの葉が極小錐になるものがある．孤立特異点をもつ余次元 1 の極小葉層構造が分類できれば面白い．

複素部分多様体は，余次元の高い極小部分多様体の豊富なクラスを与える．実際に，すべての余次元の高い極小部分多様体は，複素部分多様体に関連付けるかユークリッド空間へのコンパクト群の作用によって問題を低次元の場合に帰着することにより構成されている．後者の方法については，通常特異計量の測地線を計算する問題と関係している．そのような特異計量に対する極小曲面も研究に値する．

ユークリッド空間内の極小部分多様体は球面内の極小部分多様体と密接に関係している．$n \geq 4$ の場合，球面 $S^n$ 内の極小超曲面は構成するのが困難である．$S^n$ 内には非特異な極小超曲面の族は高々有限個しか存在しないであろうか？ $S^n$ 内に非特異で埋め込まれた極小超曲面の非自明な族が存在するかどうかは知られていない．極小超曲面をその上の錐が安定になるものに限定すればこの問への解答は肯定的である．シェーン [177] はこの場合に $S^n$ 内の極小超曲面がスカラー曲率が正の共形計量を許容することを考察した．このことは $S^n$ 内の極小超曲面の幾何とトポロジーに強い制約を課すことになる．このような極小超曲面は分類できるはずである．

$S^n$ 内の極小超曲面の体積は重要な不変量である．どのような値が可能であろうか？ 筆者は埋め込まれた極小超曲面に対して第 1 固有値は $n-1$ に等しいと予想した．この主張は極小超曲面の体積の評価と深く関係しているはずである．チェン-リー-ヤオの研究 [38] から，極小部分多様体 $M^k$ の熱核のトレースが $c_k \operatorname{Vol}(M^k) t^{-k/2}$ によって上から評価されることが分かる．

$S^n$ の座標関数が $M^k$ の固有値 $k$ に対応する $n+1$ 個の固有関数を与えるので，$M^k$ が $S^n$ のいかなる部分球面にも入っていなければ，$\mathrm{Vol}(M^k)$ が $c_k^{-1}\left(\frac{2}{e}\right)^{k/2}(n+1)$ によって下から評価されることが証明できる．

極小部分多様体 $M^k$ の体積の値からなる集合は離散的であろうか？ 同じ体積をもつ極小部分多様体の連続な族が存在し得る．$\mathbb{CP}^n$ あるいは $\mathbb{HP}^n$ 内の極小部分多様体の連続な族のホップ・ファイブレーションによる逆像をとることによって1つの自然な例が得られる．球面内に偶数次元の極小部分多様体 $M^{2k}$ $(k>1)$ の連続な族が存在するか否かは明らかでない．

コーシー-リーマン方程式は1階の楕円型方程式系として与えられるので，明らかにこちらの方が扱い易い．そのような系に対しては，アティヤ-シンガー指数定理によって解空間の次元が計算できる．残念ながら極小部分多様体は2階の楕円型方程式系によって定義されるので，その変形理論を理解することは困難である．(極小部分多様体上のヤコビ場が与えられたとき，それに沿う極小部分多様体の連続変形を見つけることができるだろうか？) 何らかの1階の楕円型方程式系に密接に関連する面積最小部分多様体のクラスがあるかもしれない．

このような面積最小部分多様体の特別なクラスを見出すために，通常，器の多様体が特殊ホロノミー群をもつことを要請する．ケーラー多様体(そのホロノミー群は $U(n)$ である)に対しては，アイデアはヴィルティンガー不等式に遡る．そのアイデアとは，各点ごとの $L^\infty$ ノルムが1であるような $k$ 次閉微分形式 $\omega$ を見つけるというものである．すると，$\omega|_M$ が体積形式であるような任意の $k$ 次元部分多様体 $M$ は，そのホモロジー類において体積最小になる．(これはストークスの定理から従う．) 通常，特殊ホロノミー群をもつ多様体に対しては，ホロノミー群から何らかの特別な閉形式が構成できる．これらの微分形式は実際に平行であり，よって一定のノルムをもつ．器の空間がユークリッド空間の場合に，ハーヴェイ-ローソン [89] は対応する極小部分多様体をカリブレートされているとよんだ．複素部分多様体から来るもの以外にそのような部分多様体を構成することは今のところ難しい．重要な例として特殊ラグランジアン部分多様体とよばれるものがある．ケーラー多様体 $M^{2n}$ の部分多様体 $L^n$ は，ケーラー形式の $L$ への制限が自明になるときラグランジアンとよばれる．$M^{2n}$ のホロノミー群が $SU(n)$ (カラビ-ヤオ

多様体)であるとき，$M$ 上には正則 $n$ 形式 $\Omega$ がある．$L$ 上で $\mathrm{Im}\,\Omega = 0$ が成立し $\mathrm{Re}\,\Omega|_L$ が $L$ の体積形式になることを要請することができる．そのような部分多様体はハーヴェイ-ローソンによって特殊ラグランジアン部分多様体とよばれた．それらは数年前に，ベッカー-ベッカー-ストロミンジャー [10] によるストリング理論の研究において独立に再発見された．そこでは，彼らはカラビ-ヤオ 3 次元多様体内の超対称性をもつサイクル，すなわち超対称性の半分を保存する 3 次元サイクルを見つけようとしていた．

特殊ラグランジアン部分多様体の変形理論はマックリーン [145] が研究し，そのような部分多様体のヤコビ場が調和 1 形式と同一視できることを証明した．これらは $L$ 上の平坦な $U(1)$ 接続を分類している．ストロミンジャー-ヤオ-ザスロウの論文 [192] において，我々は $L$ とその上の $U(1)$ 接続の対のモジュライ空間を調べた．モジュライ空間は自然な複素構造と性質のよい「半平坦」な $L^2$ 計量をもつ．このモジュライ空間の複素次元は $b_1(L)$ に等しい．

$L$ が 3 次元トーラスのとき，モジュライ空間は複素 3 次元であり正則な 3 形式をもつ．我々は，物理学に動機付けられた理由により，この複素多様体がもとのカラビ-ヤオ多様体の「ミラー(鏡像)」であるもう 1 つのカラビ-ヤオ多様体であろうと予想した．とくに，これら 2 つの複素多様体のホッジ図式は互いに他の双対であり，有理曲線の本数はミラーの周期から計算することができる．

さらに,「量子」モノドロミー群に関するいくつかの予想がミラーの解釈に基づいてなされている．例えば私たちは，上で述べた半平坦計量は，特殊ラグランジアントーラス上に境界をもつ正則円板からの何らかの寄与を取り込むことにより，非退化なリッチ平坦ケーラー計量に修正可能であろうと予想した．ヒッチン [92]，グロス-ウィルソン [81]，グロス [79, 80]，バラニコフ-コンツェビッチ [8]，および深谷-オー [58] はこの予想について進展をなしている．

同様の構成が，特殊ホロノミー群 (例えば，$G_2$ あるいは $\mathrm{Spin}(7)$) をもつ他の多様体上でもなされることが期待され，できたとすればストリング理論の研究者にとって極めて興味深い結果であろう．

残念ながら，特殊ラグランジアン部分多様体を構成する方法はあまり多く

は知られていない．それらは反正則な対合の固定点集合か複素ラグランジアン部分多様体を見ることによって見出される．また，シェーン-ウォルフソン[178] は特殊ラグランジアン部分多様体の体積最小性に基づくアプローチを展開している．これらの体積最小部分多様体を構成するためのツイスター理論と類似の方法が見つかると有用であろう．

コンパクト多様体上のベクトル束で，束と多様体の両方が特殊ホロノミー群をもつものが与えられたとき，ホロノミー群の構造を用いてベクトル束上の接続の曲率が特別な形をとることを要請できる．（例えば，ベクトル束が自明な第 1 チャーン類をもつ正則ベクトル束で接続がエルミート接続ならば，曲率のトレースが零になることを要請できる.）このような特殊接続の列は収束するとは限らず，何らかの(特異点をもつ)極小部分多様体に沿って発散する可能性がある．一般に，この極小部分多様体は開部分多様体の非加算個の和集合になり得る．一方，ティアンの最近の結果 [202] は，例えばエルミート-ヤン-ミルズ接続の場合には，発散集合が大域的な複素解析的集合になることを示している．一般に，この手続きによって，ベクトル束の理論によって極小部分多様体を構成する方法が与えられるかもしれない．

極小部分多様体のもう 1 つの例は球面の等径部分多様体である．それらは微分方程式の過剰決定系をみたす関数の集まりによって定義される．余次元が 1 の場合には，それらの主曲率は一定であり，スカラー曲率一定の極小超曲面の重要なクラスを与える．余次元が 1 より大きい場合には，1 つの定義によれば，法束が(幾何学的に)平坦であることおよび主曲率が一定であることが要請される．すべてのコンパクト対称空間をこれらの性質をもつように実現することができる．

## II　内在的幾何学

多様体の接束上に定義された非退化な 2 次形式が多様体に関するとても多くの大域的な情報を与えてくれるという事実は，かなり魅惑的なことと言える．これまでのところ，正定値な 2 次形式とローレンツ的な 2 次形式のいずれかに関する主要な結果は，直接的な幾何学的直観あるいは時空の物理学か

らの示唆によって得られている．2 次形式の指数がこれら 2 つの場合と異なる場合には，実質的に何も結果がない．複素多様体上では，正則な 2 次形式に関する何らかの理論を展開することも面白そうである．これらの理論はいずれも大きな成功をおさめるには到っていない．このことは，部分的には，これらの 2 次形式に付随して不変に定義される微分作用素を我々が理解できていないことによる．ラプラシアンと波動作用素はともにずっと成熟した歴史をもっている．実際には，我々はローレンツ計量よりも正定値計量をよりよく理解している．このことは，部分的には，ラプラシアンの理論がここ 1 世紀にわたって発展してきたのに対して，波動方程式の解の精密な定量的挙動に関してはそこまでの進展を見ていないことによる．

これらの 2 次形式について議論するとき，最初の重要な問題は許容される座標変換の下でうまく振る舞う量を見出すことである．(しばしば，多様体はあるタイプの座標変換のみを許容する特別な構造をもつ.) 2 つの異なる構造を比較しているのでなければ，計量を 1 回微分しても不変量を取り出すことはできない．最も重要な不変量は計量を 2 回微分したときに現れる．2 階微分の座標変換で不変な部分が曲率テンソルをかたちづくる．曲率によって与えられる局所的な情報は，少なくともすべての測地線が無限に延長されるという自然な仮定をおけば，多様体の大域的構造をかなりの程度まで支配する．この最後の仮定をある程度弱めることができるだろうか？ 例えば，すべての点に対して，その点における単位接ベクトルでその方向への測地線が無限に延長できないものの集合が測度零の閉集合(あるいは指定された次元の部分集合)であるという仮定の下で，大抵の大域的な定理が証明できるだろうか？おそらく，多様体の曲率(あるいは曲率テンソルの一部)が各々の非完備測地線に沿って有界であるという仮定を追加して，距離空間としての完備化の構造を問うことが可能であろう．

## II.1 曲率テンソルの全体への制約

曲率テンソル全体は，計量テンソルよりも多くの成分をもつ．よって，曲率テンソル全体について仮定をおくことは過剰決定的な条件となる．それにも

拘わらず，幾何学的直観に基づく多くの問題を問いかけることが可能である．

ラウチ [168]，クリンゲンベルグ [109] およびベルジェ [12] の時代から研究されてきた非常に広く知られた問題は，正の曲率をもつ多様体の構造に関わる．トポノゴフ [210] による比較定理はこの分野における重要な道具である．次の基本的な問題が未解決のまま残されている：十分大きい次元において，正曲率をもつ多様体で局所対称空間に同相でないものが存在するか？

低い次元においては，2 重軌道空間を用いた構成によって局所対称でない例が多く構成されている．これらの例が局所対称でないことは，一般にホモロジーの捩れによって確認される．このような多様体の実ホモロジーが局所対称空間のそれと同じであるかどうかが明らかにできれば面白いだろう．とくに，ベッチ数すべての和が同じ次元のトーラスのそれによって上から押さえられるか否かを明らかにすることは興味深い．グロモフ [75] は次元のみに依存する評価を与えている．

非負曲率をもつ計量と正曲率をもつ計量の間には非常に微妙な差異があることはよく知られている．有名なホップの問題は $S^2 \times S^2$ が正曲率計量を許容するか否かを問うている．おそらく，より一般的な現象について問うてみるべきであろう．多様体 $M$ がトーラス $T^k$ の局所的に自由な作用を許容するならば，すべての非負曲率計量は必ず次の性質をもつ点 $p$ をもつだろうか？ ：接平面 $T_p(M)$ のすべての 2 次元平面からなるグラスマン多様体 $G(2,T_p(M))$ の部分集合 $K$ で $\dim(K) \geq \dim(G(2,\mathbb{R}^k))$ をみたすものが存在し，$K$ 上で断面曲率が零になる．

関連する結果として，異種(エキゾチック)球面上に正曲率計量を構成する試みに関するグロモル-メイヤーの研究がある [74]. 彼らは，非正曲率計量で断面曲率が上のような集合上で零になるものを構成している．

ミカレフ-ムーア [148] は，ザックス-ウーレンベック [175] の有名な存在定理が正の等方的曲率をもつ単連結多様体のホモトピー群の研究に利用できることを考察した．(等方的曲率が正であるとは，複素化した上で，曲率が零平面上で正であることを意味する.) この結果は，クリンゲンベルグ [109] の有名なピンチング定理(元の証明は三角形比較定理を用いている)を導く．そのような変分法に基づく議論から，場合によってはベクトル束を用いることによって，さらにどれぐらい多くの情報が得られるかが理解できれば面白いだろう．

意外なことに，正の曲率作用素をもつ多様体が球面に微分同相であるか否かは今もって分かっていない．ハミルトン [86] は，彼のリッチ流を用いることにより，等方的曲率が正の計量をもつ 4 次元多様体を分類し，正の曲率作用素をもつ 4 次元多様体が球面に微分同相であることを証明している．

多様体の接束の 2 次元平面のなすグラスマン多様体上の関数が与えられたとき，それを曲率関数とするリーマン計量がどのような場合に存在するであろうか？

## II.2　リッチ・テンソル

リッチ・テンソルは曲率テンソルのトレースをとることによって得られ，計量テンソルと同じ型のテンソルである．リッチ・テンソルはまた全スカラー曲率の第 1 変分の計算からも得られる．この注目すべき事実は，一般相対論へ変分法的にアプローチする際に用いられた．有名なアインシュタイン方程式は，リッチ・テンソルから構成される発散のないテンソルが質量テンソルに等しいという方程式である．全スカラー曲率の変分を曲率テンソルの $L^2$ ノルムの変分に一般化する試みがなされてきた．得られる方程式は高階の方程式であり，幾何学的に理解することは困難である．しかし，この方程式はたしかにアインシュタイン方程式を一般化しており，いずれ豊かな理論が実ることになるかもしれない．

リッチ・テンソルが計量テンソルの定数倍であるとき，多様体はアインシュタイン多様体とよばれる．これは幾何学においておそらく最も自然で美しい多様体のクラスをなす．幾何学における最も基本的な問題は，いずれの多様体がアインシュタイン計量を許容するかを決定することである．また，許容するならばどのくらい許容するだろうか？ これらは意義深いと同時に困難な問題である．

多様体の次元が 5 以上であるとき，存在に対する障害は何も知られていない．多分これらの次元においてはすべての多様体がアインシュタイン計量を許容するであろう．与えられたコンパクト多様体に対して，すべてのアインシュタイン計量のなすモジュライ空間が無限個の連結成分をもつか否かを述

べることは困難である．アインシュタイン計量の連続な族の例は存在し，知られている例は特殊ホロノミー群をもつ計量と関係している．最も注目すべき例はケーラー-アインシュタイン計量として得られる．

4 次元以下においては，アインシュタイン多様体はずっと強い剛性をもつ．例えば，$\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)|$ という制約条件が知られている（ヒッチン [91] を見よ）．ここで，$\chi(M)$ と $\tau(M)$ はそれぞれ多様体 $M$ のオイラー数および符号数である．おそらく次のような一般的な構造定理が成立するであろう：すべての 4 次元多様体は (1) アインシュタイン多様体，(2) 曲面上の曲面束（ザイフェルト・ファイブレーションに類似の制御可能な特異点をもつことをゆるす），(3) 3 次元多様体上の円周束を，球面かトーラス上の円周束である 3 次元多様体に沿って連結することによって得られる．これはサーストンの研究の 4 次元への一般化と見なされる．

3 次元および 4 次元においては，ハミルトンの方程式がサーストンの双曲化予想と上に述べた一般化の両方の証明に利用可能なことが望まれる（例えば [87] を見よ）．最も重要な問題は，ハミルトン方程式の解が時間発展する際に生じる特異点の構造を理解することである．

アインシュタイン方程式の解を構成することは困難な作業である．物理学者は最初，対称性（群作用）の手法を用いることにより次元をおとすことを考えた．これは非常に重要な手法であるが，残念ながらそのようにして得られる解は，大抵の場合局所的にしか定義されず通常特異点をもつ．計量が正定値の場合に，マッケンジー・ワン，ツィラーその他の人々が系統的な研究を行い多くの重要なアインシュタイン多様体を見出した（例えば [216] を見よ）．最近ベーム [18] が 5 次元から 9 次元までの球面上に等質でないアインシュタイン計量の例を発見した．

定常的で軸対称性をもつ 4 次元のローレンツ計量に対して，ゲロック [66] はアインシュタイン方程式の 1 つの解から別の解を与えるベックルント変換を導入した．この変換は極めて非自明である．残念ながら，彼の理論はほぼ局所的なものであり，この変換によって得られる計量のいずれが完備になるかを理解することが強く望まれる．また，正定値計量に対してベックルント変換がどのようになるかを理解することも非常に興味深い．

実際，70 年代にホーキングとその他の人々 [67] がアインシュタイン方程

式の真空ローレンツ解を正定値アインシュタイン計量に解析的に接続する方法(ウィック回転とよばれる)を提案した．アインシュタイン方程式の解の特異点がウィック回転を通じてどのように「矯正される」かを理解することはかなり壮大な問題である．とくに，シュワルツシルト解は $S^2 \times \mathbb{R}^2$ 上の美しい非特異なリッチ平坦計量になり，この計量は非ケーラー的である．残念ながら，ウィック回転は特殊な局所座標の選び方に依存しているように見え，数学的に真に正当化された手続きではない．結果として，この操作は限られた例に対してのみ成功をおさめてきた．ウィック回転のアインシュタイン方程式への効果を系統的に研究することは，間違いなく物理学と幾何学の双方にとって有益であろう．

ペンローズのツイスター・プログラムおよびシンプレクティック簡約の考え方もまた，超ケーラー的なリッチ平坦計量を理解する際に有効であった [93]．しかしながら，これらの手法も計量を大域的に理解するという観点からするとウィック回転と同じ問題を抱えている．

今のところ，アインシュタイン計量を構成する最も有効な方法はケーラー幾何に基づいている．この幾何においては，計量は $\sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$ によって与えられ，リッチ・テンソルは $R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2 \log\det(g_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$ によって与えられる．

リッチ・テンソルが単純な形をしていることから，カラビはケーラー幾何においてはアインシュタイン計量の構成がずっと容易であろうと推測した．与えられた計量 $\mathring{g}_{\alpha\bar{\beta}}$ を $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}$ ($\varphi$ は実数値関数)によって変形すると，アインシュタイン方程式 $R_{\alpha\bar{\beta}} = c g_{\alpha\bar{\beta}}$ は次のような単純な方程式になる：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log\det\left(\mathring{g}_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \\
&= c\left[\mathring{g}_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right].
\end{aligned}
$$

体積要素 $V\, dz^1 \wedge \cdots dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n$ で

$$
-\frac{\partial^2 \log V}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} = c\mathring{g}_{\alpha\bar{\beta}}
$$

をみたすものが存在するとき，上の方程式は

$$
\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\left\{\log\left[\det\left(\mathring{g}_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) V^{-1}\right] + c\varphi\right\} = 0
$$

と書き換えることができる．コンパクト多様体上では，必然的に

$$\det\left(\mathring{g}_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}\right)=Ae^{-c\varphi}V$$

が結論付けられる．ここで，$A$ は $V$ に吸収できる定数である．体積要素 $V$ の選択は，とくに非コンパクト多様体に対して，ケーラー-アインシュタイン計量の構成において非常に重要な役割を担うことになる(例えば [41, 204] を見よ)．

偏微分方程式の見地からすると，$c<0$ の場合が上の方程式が最も取り扱いやすい場合であることは明らかである．この場合，多様体 $M$ がスカラー曲率が負のケーラー-アインシュタイン計量を許容するための必要十分条件は，$M$ の標準直線束が豊富(ample)であることである [6, 222]．$c=0$ の場合，$\frac{\partial^2\log V}{\partial z^i\partial\bar z^j}=0$ をみたす体積形式 $V$ が存在するという仮定の下で，すべてのケーラー類はリッチ曲率が零のケーラー計量を唯一つもつ [222]．結果として，リッチ曲率が零のケーラー計量の空間は，標準直線束が平坦な複素構造のモジュライ空間とそのような複素構造それぞれに対するケーラー錐によってパラメータ付けられることになる．

ケーラー-アインシュタイン計量の存在からの 2 つの重要な帰結は，チャーン数の間のある関係式と接束の安定性である．正則ベクトル束の安定性は，マンフォード [157] によって，複素多様体 $M^n$ のある偏極に関して定義されている．(偏極はケーラー類 $[\omega]$ によって与えられる．) 階数 $r$ のベクトル束 $V$ に対して，$V$ の $\omega$ に関する次数が $\deg(V)=c_1(V)\wedge\omega^{n-1}$ として定義され，$V$ の傾きが $\frac{\deg(V)}{r}$ として定義される．ベクトル束 $V$ がマンフォードの意味で安定であるとは，$V$ の任意の連接部分層の傾きが $V$ の傾きより小さくなるときを言う．与えられたベクトル束が安定か否かを確かめることは容易ではない．部分束をとると曲率が減少することを考察することにより，小林 [110] とリュプケ [141] は，ケーラー-アインシュタイン計量 $\omega$ を許容する多様体の接束は $\omega$ によって定義される偏極に関して安定であることを示した．スカラー曲率が零でない場合には，偏極は $c_1(M)$ あるいは $-c_1(M)$ のいずれかになる．ケーラー-アインシュタイン計量を許容する場合に接束が他の偏極に関して安定であるか否かを決定することはかなり興味深い問題である．

安定性の概念は $\omega$ が閉でない場合でも意味をもつことが分かる．第 1 チャー

ン形式が $\partial\bar{\partial}f$（$f$ は $M$ 全体で定義された関数）を除いて定義されているので，$\int_M c_1(V)\wedge\omega^{n-1}$ は $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1})=0$ である限り矛盾無く定義（well-defined）される．そのような性質をもつエルミート計量 $\omega$ はゴーデュション [60, 61] によって研究され，彼は方程式 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1})=0$ が，与えられた $\omega$ の共形変形によって常に解けることを証明した．

筆者が 70 年代半ばに行ったケーラー-アインシュタイン計量の存在に関する研究のすぐ後に，筆者および他の人々が正則ベクトル束上に同様の標準的計量を見出す試みを行った．自然な概念はエルミート-アインシュタイン接続である．ベクトル束 $V$ 上のエルミート接続を考えよう．曲率 $F$ の底空間に関わる 2 つの添字を縮約して得られる $\mathrm{tr}(F)$ は $V$ の束準同型になる．このとき $\mathrm{tr}(F)=cI_V$ を要請するのである．ここで，$c$ は定数で $I_V$ は恒等写像である．

ギーゼカ安定性とよばれるもう 1 つの概念があり，幾何学的不変式論の見地から同じく自然なものである．正則ベクトル束 $V$ が正の直線束 $L$ に関してギーゼカ安定であるとは，$V$ の任意の非自明な連接部分層 $S$ に対して

$$\frac{1}{\mathrm{rank}\ S}\sum_i(-1)^i\dim H^i(M,\,S\otimes L^k)$$
$$<\frac{1}{\mathrm{rank}\ V}\sum_i(-1)^i\dim H^i(M,\,V\otimes L^k)$$

が十分大きい $k$ に対して成り立つことを言う．

リーマン-ロッホの公式を用いることにより，$\sum_i(-1)^i\dim H^i(M,\,S\otimes L^k)$ は $S$ の $L$ に関するヒルベルト多項式とよばれる $k$ の多項式によって与えられることが分かる．ギーゼカ [68] と丸山 [143] は，射影曲面上のギーゼカ安定なベクトル束の空間は準射影的多様体をなすことを証明した．

ギーゼカ安定性がどのようにして現れるかを説明するために，$V$ のみに依存する大きな整数 $k_0$ が存在し，$k\geq k_0$ に対して $H^i(M,\,V\otimes L^k)=0$（$i>0$）かつ $V\otimes L^k$ が大域切断によって生成されることに注意する．ある固定されたヒルベルト多項式をもつ正則ベクトル束 $V$ の族で $\wedge^r V$ がある固定された直線束 $H$ に同型であるものを考える．（ここで $r=\mathrm{rank}\ V$ である．）$W=H^0(M,\,H\otimes L^{rk})$ とおく．

するとリーマン-ロッホの定理により $\dim H^0(M,\,V\otimes L^k)$ は一定であり，

$H^0(M, V\otimes L^k)$ はある固定されたベクトル空間 $S$ と同一視できる．よって自然な準同型

$$\bigwedge^r S \longrightarrow W$$

が得られ，これは $V$ の正則構造を決定する．群 $SL(S)$ が $\mathrm{Hom}\,(\wedge^r S, W)$ に作用し，適切に定義された商空間がそのような $V$ 全体のモジュライ空間である．

ギーゼカはギーゼカ安定性が $SL(S)$ のそのような作用の幾何学的不変式論の意味での安定性に同値であることを証明した．

筆者の以前の学生であるコナン・ルンは，彼の学位論文 [118] において，ギーゼカの研究を解釈し直すためにベクトル束 $V$ 上のユニタリ接続の空間 $U$ を考察した．$D_A$ を $V$ 上のユニタリ接続とし，$B$ と $C$ を $D_A$ における $U$ の接ベクトルとする．また，$\omega$ を多様体上の ケーラー形式とし，$k>0$ を整数とする．このとき $U$ 上の 2 形式を

$$\Omega_k(D_A)(B,C) = \int_M \mathrm{tr}\left[B\wedge e^{\left(k\omega I_V + \frac{i}{2\pi}R_A\right)}\wedge C\right]_{\mathrm{sym}} \mathrm{Td}(M)$$

によって定義する．ここで，$[\quad]_{\mathrm{sym}}$ はその内部の微分形式の次数付き対称積を表し，$R_A$ は $D_A$ の曲率 2 形式を表す．また，$I_V$ は恒等写像を表し，$\mathrm{Td}(M)$ はトッド類である．

$k$ が十分大きいとき，$k\omega$ は $R_A$ に対して支配的であるので，$\Omega_k$ は非退化なシンプレクティック形式になる．ゲージ群 $G$ は $U$ に，これらのシンプレクティック形式に関してシンプレクティックに作用する．

モーメント写像は

$$\mu_k\colon U \longrightarrow \mathcal{G}^*$$
$$\mu_k(D_A) = \left[e^{k\omega I_V + \frac{i}{2\pi}R_A}\,\mathrm{Td}(M)\right]^{2n}$$

と計算できる．ここで，$\mathcal{G}$ ($G$ のリー環) は $V$ の準同型に値をもつ $M$ 上の最高次の微分形式の空間と同一視できる．

一般には $\mu_k^{-1}(0)$ は空集合かもしれない．そこで $\omega^n$ の定数倍を選ぶことにすると，モーメント写像の方程式は

$$\left[e^{\frac{i}{2\pi}R_A+k\omega I_V}\,\mathrm{Td}(M)\right]^{2n} = \frac{1}{\mathrm{rk}(V)}\chi(M,\,V\otimes L^k)\frac{\omega^n}{n!}I_V$$

によって与えられる．

これがルンの方程式である．彼は $k\to\infty$ としたとき，この方程式がドナルドソン-ウーレンベック-ヤオ [51, 212] の方程式に帰着することを考察した．また，$V$ が既約なとき，十分大きい $k$ に対して上の方程式に曲率が一様に有界な解が存在することが，本質的にギーゼカ安定性と同値であることを証明した．

トッド類を導入することによって，ヒルベルト多項式が得られ，さらにギーゼカ安定性の概念に導かれることになるのだが，一方，解析の側面からはトッド類を考えることはあまり本質的でないように見える．トッド類を他の何らかの特性類(例えば Â 類)で置き換えると，他の安定性の概念が得られるかもしれない．

ベクトル束 $V$ が多様体 $M$ の接束であり，$M$ 上のケーラー計量 $g$ を $V$ 上の計量とみなしてドナルドソン-ウーレンベック-ヤオの方程式を書き下したとき，得られる方程式はケーラー-アインシュタイン方程式に他ならない．したがって，ドナルドソン-ウーレンベック-ヤオの方程式はケーラー-アインシュタイン方程式(これは完全に非線型である)を(半)線型化したものと解釈することができる．ベクトル束の安定性は前者の方程式の解の存在のための判定条件であるから，多様体の何らかの非線型な安定性がケーラー-アインシュタイン計量の存在に関わっているはずであることは明らかである．そこで 80 年代半ばに筆者は，正の第 1 チャーン類をもつ代数多様体の場合に，ギーゼカ-マンフォード安定性がケーラー-アインシュタイン計量の存在のための判定条件になるであろうという予想を提出した([224] を見よ)．この視点は最近ティアンの仕事 [201] に引き継がれた．彼は多少異なる安定性の概念を考えたが，筆者の元来の予想もまず正しそうである．

多様体上のエルミート計量を $g$ とし(接束の)束計量を $h$ とする．$g$ がケーラーでない場合でも，筆者がジュン・リーと行った研究 [126] (2 次元の場合はブッホダールの論文 [21] も見よ)によれば，エルミート・ヤン-ミルズ方程式 $\mathrm{tr}(F(h))=\lambda I$ は意味をもつ．ベクトル束の計量 $g$ に関する安定性の概

念も $(\partial\overline{\partial}\omega_g)\wedge\omega_g^{n-2}=0$ ($\omega_g$ は $g$ に随伴する $(1,1)$ 形式)である限り意味をもつ．接束が $\omega_g$ に関して安定であるとき，エルミート・ヤン-ミルズ方程式をみたすエルミート計量 $h$ が存在することも同じく証明できる．[60] の結果により，$h$ を共形的に変形すれば条件 $(\partial\overline{\partial}\omega_h)\wedge\omega_h^{n-2}=0$ をみたす $\tilde{h}$ を得ることが可能である．このようにして，ベクトル束が接束であるとき，$(\partial\overline{\partial}\omega_g)\wedge\omega_g^{n-2}=0$ をみたすエルミート計量 $g$ の空間からそれ自身への写像が得られる．この写像の固定点の存在がケーラー-アインシュタイン計量の存在問題に関わっていると信じるのは極めて自然なことである．明らかにケーラー-アインシュタイン計量はこの写像の固定点であり，他にケーラーでない固定点が存在するか否かに興味がある．上の写像をエルミート計量の空間上で反復したとき，多様体の安定性に関する適切な条件の下で固定点に収束するかもしれない．おそらく，ウーレンベックと筆者 [212] の議論を強化して，必要な評価を得ることができよう．これは実行に値する計画である：ケーラー-アインシュタイン計量の存在問題に解を与えるにとどまらず，非ケーラー的な多様体上の標準的なエルミート計量をも与える可能性がある．

複素 2 次元においては限られた数の非ケーラー的曲面しか存在しないが，高次元においてはずっと多くの非ケーラー的な複素多様体が存在することは明らかである．さらに，以下において詳しく説明するように，非ケーラー的多様体上の標準的なエルミート計量はストリング理論において有用であろう．何故なら，そのような多様体は，リード [170] のアイデアによりカラビ-ヤオ 3 次元多様体全体のなすモジュライ空間をつなぐのに使えるかもしれないからである．

非ケーラー的曲面上の標準的エルミート計量を見つけるために上のような束計量を用いるアイデアは，ジュン・リー，F.Y. ゼンと筆者 [127] によって，正則曲線を含まない $\mathrm{VII}_0$ 型曲面は井上曲面 [103] になるというボゴモロフ [17] の主張の最初の包括的な証明を与える際にすでに用いられている．ここでの非常に重要な考察は，正則曲線の非存在が，ジュン・リーと筆者が [126] において述べた意味で接束が安定であることを確かめる上で実際に助けになるということである．有限個の正則曲線を含む $\mathrm{VII}_0$ 型曲面を分類することは未解決問題として残されている．同様の議論がこれらの曲線に沿って極をもつ余接束に適用できると考えるのは極めて自然なことである．

多くの部分多様体を含む多様体に対しては，接束の安定性を証明するのは困難な作業になるかもしれない．このことは，我々が [126] において導入した安定性の概念の場合にとくにあてはまる．

ロチェックは，彼のミラー対称性に関する論文 [171] において，$(2,2)$ 超対称性を許容する非ケーラー的多様体のクラスを提案した．彼の課した条件はかなり強く，実り多い例を構成することは困難であった．1 つの条件は，多様体 $M$ の接束が，$\det V_1$ が $\det^{-1} V_2$ に同型であるような 2 つの束 $V_1, V_2$ の直和 $V_1 \oplus V_2$ に分解することを要請する．さらに，$V_1$ と $V_2$ は葉がケーラーである(すなわち，$M$ はこれらの葉に制限するとケーラーであるような大域的エルミート計量を許容する)ような $M$ 上の葉層構造を定めることが要求される．そのような多様体のクラスがどの程度限定されるかを理解することは興味深い問題である．

多様体がスカラー曲率が負のケーラー-アインシュタイン計量を許容するとき，筆者は複素球体およびその他のエルミート対称領域によって一意化される多様体を特徴付けることができた [221, 225]．前者の特徴付けはチャーン数のみに依存し，後者はあるベクトル束の非自明な正則切断の存在に依存している．チャーン数による特徴付けの結果は広く用いられている．しかしながら，非常に興味深い問題が解答を得ないままである．すなわち，数論的な群によって定義される階数 1 のエルミート局所対称多様体は幾何学的にどのように特徴付けられるだろうか？ おそらく多くのヘッケ対応を用いることができようが，そこに現れる条件を確認することは容易ではない．

対称領域によって被覆できる多様体の位相的特徴付けを見出すことは非常に面白いが同時に困難な作業になるだろう．もちろん，3 次元多様体に対してはサーストンによる難解な定理がすでに存在する．当然のことながら，多様体をアインシュタイン多様体に限定することにより問題をより簡単なものにできる．局所対称多様体を特徴付ける上で有用なリーマン幾何における適切な安定性の概念が存在するであろうか？ つい最近になって，ベッソン等 [13]，ルブラン [116]，ガースキー-ルブラン [84] および C. ルン [120] は，階数 1 の局所対称空間というアインシュタイン多様体の特徴付けについていくらかの進展をなしている．最初の仕事は重心の概念に基づいているが，後の仕事はサイバーグ-ウィッテン不変量に依存しており 4 次元多様体にしか通用しな

い．すでに言及したように，アインシュタイン計量に対する強力な存在定理が知られていないことが最大の難点である．

アインシュタイン計量の存在にある程度近い存在定理として，タウベス [195] は 4 次元多様体を十分多くの点においてブローアップすると，結果として得られる多様体上に自己双対なワイル曲率をもつ計量(すなわち，ワイル曲率がスター作用素の下で不変な計量)が存在するという注目すべき定理を証明した．この結果は美しい特異摂動の議論によって証明される．しかしながら，そのような計量のモジュライ空間は制御が困難であり，存在の位相的な帰結も明らかでない．同様の議論を用いてアインシュタイン計量を構成することができれば喜ばしい．タウベスの定理は，彼の構成した計量をもつ 4 次元多様体のツイスター空間を考えることにより，多くの 3 次元複素多様体を生み出すことに注意すべきである．それらのうち非ケーラー的なものについて，その上のよい標準的エルミート計量とはどのようなものであろうか？

ケーラーでもあるようなアインシュタイン計量についていくつかのポイントを議論しよう．そのような計量については，スカラー曲率が負の場合がずっとよく理解されており，このことは非コンパクトなケーラー多様体についても言える．しかしながら，多くの問題，とくにアラケロフ幾何との関係がまだ追求されていない．

複素 1 次元においてはそのような計量はポアンカレ計量に他ならない．しかしながら，代数曲線を射影空間の部分集合として定義する同次多項式に関して，この計量を明示的に表す式を見出すことは困難な問題である．この問題はそのような曲線の上半平面による一意化を明示的に求めることと同等である．ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を用いて楕円曲線を $\mathbb{C}$ に一意化することができるし，ある種の非コンパクトな曲線に対してはピカール-フックス方程式を用いて超幾何級数による一意化を見出すことができる．C. ドランは学位論文 [52] において，一般的なファイバーが楕円曲線あるいは K3 曲面であるような曲線上のファイバー空間を見ることにより，この種の問題をずっと包括的に研究した．

何年も前に筆者は，代数多様体上のそのような計量は標準直線束の高次のべき乗による射影空間への埋め込みから引き起こされる計量によって近似できると予想した．この予想はティアン [198] のハーバードでの学位論文にお

いてシウ-ヤオ [188] の $\overline{\partial}$ 局所化の方法を用いて証明された．ゼルディッチ [228] は最近の論文において漸近的スペクトル解析を用いてティアンの評価を改善した．S.W. ザン [229] によって研究されたように，この種の埋め込みはアラケロフ幾何への応用をもつ．

関連する対象として，準射影的多様体 $M \setminus D$ 上の完備なケーラー-アインシュタイン計量がある．（ここで，$M$ は代数多様体，$D$ は正規交叉因子，$K_M \otimes [D] > 0$ である.）これは最初にチェン-ヤオ [41] によって，そして後にティアン-ヤオ [204] その他の人々によって研究された．この計量の $D$ の近くでの主要項は知られているが，$D$ に沿っての漸近展開を見出すことも可能なはずである．

ケーラー-アインシュタイン計量の使い道の 1 つに，基底にある複素多様体を調べるための解析的道具を提供するということがある．射影多様体 $M$ が与えられたとき，その普遍被覆はかなり超越的な対象である．しかしながら，その代数的意味をとらえたいという欲求がある．筆者が 10 年以上も前に問うた自然な問題は，$M$ の普遍被覆から別の代数多様体 $N$ の開集合への有理型写像で $M$ の普遍変換が $N$ の双有理変換に拡張されるものを見出すというものである．この主張はすべての射影多様体に対して成立するにはよすぎるかもしれないが，それほど的外れではないはずである．重要な問題は，増大度の最も低い正則関数をいかにして構成するかということである．例えば，$M$ の普遍被覆を有界領域として実現したいならば，有界正則関数を構成する必要がある．R. シェーンと筆者 [179] はコンパクト多様体を被覆する多様体上の有界調和関数を構成する方法をもっている．（強い意味で負の曲率をもつ多様体に対しては，この問題は最初サリヴァン [193] とアンダーソン [2] によって研究された.）これに対して，正則関数はより制約されており，その存在を扱う手法は知られていない．

スカラー曲率が負のケーラー-アインシュタイン計量の理論において，ケーラー類は標準的であり第 1 チャーン類の符号を逆にしたものである．この場合，計量は複素構造によって決定される．よって，ケーラー-アインシュタイン計量の任意の不変量は複素構造の内在的な不変量を与える．例えば，そのような計量は多様体上の種々の自然なベクトル束の切断に作用するラプラス作用素を与える．これらのラプラシアンの固有値に随伴するゼータ関数は複

素構造に関連する興味深い性質をもつはずである．しかしながら，レイ-シンガー [169] によって導入された解析的トーションを除いてはそのようなゼータ関数についてほとんど何も知られていない．固有値に関する情報を用いてスカラー曲率が負のケーラー-アインシュタイン計量のモジュライ空間のコンパクト化を与えることができれば面白いだろう．微分幾何の手法を用いて，スカラー曲率が負のアインシュタイン-ケーラー計量を許容する多様体上の射影的複素構造の空間が有限個の連結成分しかもたないことを証明できるだろうか？ 互いに微分同相な 2 つのケーラー-アインシュタイン多様体でスカラー曲率の符号が反対である例が存在するというカタネーゼ-ルブラン [36] とコチック [113] の興味深い結果がある．サイバーグ-ウィッテン理論によって達成された主要な結果の 1 つによれば，このような現象はケーラー曲面に対しては起こり得ない [56]．

モジュライ空間をコンパクト化する問題を理解するための自然なアプローチの仕方は，そのヴェイユ-ピーターソン計量を調べることである．一般に，ヴェイユ-ピーターソン計量は完備でなく曲率も非有界である．しかしながら，そのリッチ・テンソルはコンパクト集合の外で負定値になる可能性があり，そのときその挙動はモジュライ空間上の標準的なケーラー-アインシュタイン計量の挙動を反映するはずである．スカラー曲率が負のケーラー-アインシュタイン計量のモジュライ空間のヴェイユ-ピーターソン計量は，リッチ平坦ケーラー計量のモジュライ空間のそれとは大きく異なっている．前者の場合，おそらくリッチ曲率は上に有界であろうと期待するのが自然である．一方，後者の場合，リッチ曲率は下に有界のはずである．いずれの場合も体積が有限になることが証明できれば面白いだろう．C.-L. ワン [214] は，リッチ平坦ケーラー多様体のモジュライ空間上のヴェイユ-ピーターソン計量がモジュライ空間の特異点の近くで完備になるための条件を明らかにした．

有限体積をもちリッチ曲率が下から押えられた完備ケーラー多様体をコンパクト化することができるだろうか？ 何年も前に筆者は，幾何学的手法を用いて有限体積をもつ完備多様体をコンパクト化する研究に手をつけた．（シウ-ヤオ [188] を見よ.）筆者はモック-ゾンと以前の学生である F.Y. ゼンにこの研究に取り組むようにアドバイスした．完成するには到っていないが，モック-ゾン [152]，モック [151]，ユン [227] およびゼンと筆者の未発表の仕事に

おいて進展を見ている．

理論物理におけるストリング理論の革命以来，リッチ平坦なケーラー多様体すなわち，カラビ-ヤオ多様体)の理論は活気にあふれた変化を経験した．キャンデラス，ホロヴィッツ，ストロミンジャーおよびウィッテンによる基本的な論文 [28] において，カルザ-クライン模型が調べられた．そこでは，非自明な平行スピノル場をもつコンパクト 6 次元多様体を用いることによって，10 次元時空を 4 次元時空にコンパクト化することが要求される．最後の解析によりこのコンパクト化は複素 3 次元のカラビ-ヤオ多様体によって与えられることが示されている．この有名な論文は，ただちにそのような多様体，とくにオイラー数が $\pm 6$ に等しくかつ非自明な基本群をもつものを構成する大量の研究をよび起こした．最初のうち，物理学者達は 3 次元カラビ-ヤオ多様体はせいぜい 2，3 しか存在しないと考えていた．ストリング理論に関する最初の大きな会議 [223] の期間中に，筆者はこうした多様体を構成する多くの方法を提示した．物理学者達は，少なくとも 1 万個のオーダーでそのような多様体が存在するはずであることを知ってずいぶん驚いていた．筆者は，重み付き射影空間の直積において超曲面の完全交叉をとることによってこうした多様体の大きなクラスを構成することを提案した．最初の重要な例は，$\mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^3$ 内の 2 つの 3 次超曲面と双次数 $(1,1)$ の超曲面の完全交叉である．この多様体はオイラー数 $-18$ をもつ．筆者は位数 3 の群がこの多様体上に固定点をもたずに作用することを見出した．よって商多様体はオイラー数 $-6$ と非自明な基本群をもつことになる．ティアンと筆者 [203] は同様の方法によってさらに多くの例を見出した．B. グリーンは，これらすべての構成によって同じ位相をもつ多様体が得られることを考察した．グリーンと彼の共同研究者達は，これらの多様体の現象論的な帰結についても議論している [3].

カラビ-ヤオ多様体の最初の一般的な理論は，ピアテツキ・シャピロとシャファレヴィッチによる曲面の場合の研究であった [165]（ケーラー多様体の場合はバーンズ-ラポポルト [22] による)．彼らは K3 曲面のモジュライ空間に対して周期写像が単射になることを見出した．全射性の問題は，ずっと後になってクリコフ [114] とパーソン-ピンカム [164] によって扱われた．これらの論文はともに深い研究であり，多くの代数的な道具を必要とする．

これらの定理は，筆者のリッチ平坦計量の存在定理が適用できるというト

ドロフ [207] の考察によって大幅に簡略化された．鍵になる点は，この計量が $S^2$ によってパラメータ付けられる複素構造の族を与えるというヒッチン [91] の考察である．この複素構造のなす有理曲線は，モジュライ空間における 1 つの運動の仕方を与える．（ずっと厳密で詳細な取り扱いはその後シウ [187] によって与えられた.）これらの手法を高次元のカラビ-ヤオ多様体に一般化できるだろうという期待があったが，実行されていない．一方，正則シンプレクティック・ケーラー多様体の変形の障害が消えるというボゴモロフ [17] の有名な定理は，ティアン [197]（学位論文）とトドロフ [208] によって独立に，一般のカラビ-ヤオ多様体の場合へ一般化された．この基本的な定理は，カラビ-ヤオ多様体のその後の展開において重要な役割を果たしている．（非障害性の証明に用いられる公式の類似物が，コンツェビッチ，深谷賢治その他の人々によって，ミラー対称性を代数的に定式化する試みにおいて高次の積演算を構成する際に用いられている [8, 58].）

ストリング理論はカラビ-ヤオ多様体のモジュライ空間上での広範な計算を必要とする．トレリの定理が成立するので，最高次数の正則微分形式の周期がモジュライ空間の局所的な幾何を決定する．$\Omega$ を最高次数の正則微分形式の局所正則族とするとき，ケーラー・ポテンシャルは $\log\|\Omega\|^2$ と書けることがティアン [197] と物理学者達によって考察されている．$n$ 次の正則微分形式が $n$ 次コホモロジー群をファイバーとする（平坦）ベクトル束の部分直線束を定めるという事実は，ヴェイユ-ピーターソン幾何を付加的なデータとともに計算する方法を与えてくれる．この平坦ベクトル束の部分直線束による商は複素構造の無限小変形を記述し，よってモジュライ空間の接束を与える．

2 つのグループ（キャンデラス等 [27] とストロミンジャー [191]）がこの種の幾何を研究した．ストロミンジャーはこの幾何をスペシャル幾何と名付けた（彼は元々これを制約型ケーラー幾何とよんだが，筆者がスペシャル幾何というよび方に変えるよう提案した）．スペシャル幾何は，その後のミラー対称性の計算において重要な役割を果たすことが明らかになっている．

ゲプナー [65] とグリーン-ヴァッファ-ワーナー [73] の研究はある種のカラビ-ヤオ多様体に共形場理論と経路積分をどのようにして付随させればよいかを発見的に示している．それからまもなく，ディクソン [50] とレルシュ-ヴァッファ-ワーナー [117] はミラー対称性を予言した．それは次のことを主

張する：任意のカラビ-ヤオ多様体 $M$ に対してもう 1 つのカラビ-ヤオ多様体 $M'$ を対応させて，$M$ からそのミラー $M'$ に移るとき 2 種類の 3 点相関関数(1 つは複素構造の変形に対応し，他方はケーラー構造の変形に対応する)が互いに対応するようにできる．$M$ の複素構造の変形に対する相関関数は $H^1(T_M)$ の自然な 3 重積に他ならない(これが可能なのは，$\Lambda^3 T$ が自明なことによる)．ケーラー構造の変形に対する相関関数はずっと複雑である．$H^1(T_M^*)$ 上の古典的な位相的カップ積以外に，有理曲線全体にわたる積分に由来する補正を加える必要がある！ B. グリーンと筆者は，1990 年のバークレーでのミラー多様体に関する最初の会議において，後者の 3 重積を量子カップ積とよんだ．ヴァッファはそのような環構造から生じるコホモロジーを量子コホモロジーとよんだ．

$\mathbb{CP}^4$ 内の 5 次超曲面として得られる重要な例に対して，グリーン-プレッサー [72] は共形場理論に由来する議論に基づいてミラーの存在を証明した．その後ただちに，キャンデラス等 [29] はミラー予想の主張に基づいて相関関数の完全で詳細な計算を行った．この際，スペシャル幾何をケーラー構造および複素構造の両方の側面において特定することが重要になる．この特定のための計算は壮大な数学的研究である．この計算はピカール-フックス方程式をみたす正則 3 次形式の周期の考察と複素構造の退化にともなうモノドロミーの理解に基づいてなされる．キャンデラス達のこの研究は，ここ 10 年間のカラビ-ヤオ多様体の展開に大きな影響を与えた．中でも，5 次超曲面上の有理曲線の個数(これは適切に定義する必要がある)を数える美しい公式を与えている．このような公式の存在さえも数学の文献においては予想されていなかった．多くの数学者によるその後の進展は，すべて基本的にはキャンデラスの公式を種々の形式において解釈し直したものに他ならない．

キャンデラスの計算手法は，複素構造の変形空間の次元が 1 次元の場合に，多くの数学者の研究グループによってただちに実行された．変形空間の次元が高次元の場合には計算には新しい手法が必要となり，これは細野-クレム-ティーセン-ヤオ [97] とキャンデラス-ド・ラ・オッサ-フォント-カッツ-モリソン [30] によって独立に実行された．さらなる一般化は細野-リアン-ヤオ [98] によってなされた．最初の論文においては，フロベニウス法とゲルファント-カプラノフ-ゼレヴィンスキ [63, 64] の超幾何微分方程式系が広範囲にわたっ

て用いられている．フロベニウス法における形式的パラメータは，後に同変幾何における超平面類によって置き換えられた．これによってキャンデラスの公式の同変幾何による正しい解釈が与えられた．

任意のケーラー多様体に対して量子コホモロジー環の構造について議論することは意味がある．正のチャーン類をもつ多様体に対しては，量子コホモロジーの結合性がインスタントン和を決定するのに十分である．この主張は，物理学者のグループによって導入された WDVV 方程式に由来する([220, 53]を見よ)．このような多様体に対しては，数学者は量子コホモロジーの結合性を利用してインスタントン和を計算することができた．フロベニウス多様体の概念は，これらの計算を理解するために展開され，さらに等質多様体内の曲線を数える公式を導くことになった．

(半正値的なシンプレクティック多様体に対する)この結合則の最初の厳密な証明はルアン-ティアン [173] による．まず最初に，インスタントン和の意味を定義する必要がある．ルアン [172] は曲線の種数が零の場合に，シンプレクティック多様体に対していくつかの特別な場合を定義した．その後ルアン-ティアンはこれを種数零の不変量の完全系に拡張し [173]，さらに任意種数の曲線へと一般化した [174]．彼らの定義は 4 次元多様体に対するゲージ不変量のドナルドソンによる定義を雛形としている．基本的な道具は，擬正則曲線に対するコンパクト性の議論であり，これは本質的にザックス-ウーレンベック [175] による．グロモフ [76] によって，擬正則曲線がシンプレクティック多様体の剛性の研究に使えることが考察された．ルアン-ティアンによる量子コホモロジーに対する結合則の定義と証明は，一般的に選ばれた概複素構造に関する擬正則曲線に対してのみ機能する．一方，可積分な概複素構造は一般的ということからは程遠く，よって射影多様体だけに限定して考えるときにはインスタントン和は別のやり方で定義する必要がある．デュブロビン-コンツェビッチ-マニン，さらに最近になってカオ-ゾウがフロベニウス多様体の理論に関して重要な進展をなしている．

ザックス-ウーレンベック [175]，グロモフ [76]，パーカー-ウォルフソン [163] その他の人々の研究に基づいて，コンツェビッチ [111] は基点付き有理曲線から射影多様体への有理写像のモジュライ空間のコンパクト化の概念を定義した．射影多様体がある等質空間における完全交叉である場合に，このコンパ

クト化された空間上のある種の障害束を構成する方法がある．この障害束が有理写像のモジュライ空間と同じ階数をもつならば，障害束のオイラー数を考えることができる．しかしながら，一般にオイラー数を定義するためには，リー-ティアン [124] によって初めてなされた仮想的なサイクルの構成を用いる必要がある．射影超曲面を一般的にとったとき，固定されたホモロジー類に属する曲線の「個数」をこのようなオイラー数によって定義することができる．5 次超曲面に対しては

$$K_d = \sum_{k|d} n_{d/k} k^{-3}$$

($K_d$ はオイラー数，$n_{d/k}$ は有理曲線の期待される個数)を得る．被覆公式とよばれるこの公式はキャンデラス等 [31] によって発見され，アスピンウォール-モリソン [5] とマニン [142] によって厳密に正当化された．数 $n_i$ は射影不変量であり，上に言及したシンプレクティック不変量とは別の名前でよぶべきである．1 世紀前にシューベルトによって創始された基本的研究に敬意を表してシューベルト不変量とよぶのが適切であろう．

多くの重要な場合に，リー-ティアン [125] さらに続いてジーベルト [185] は，これらのシューベルト不変量がルアン-ティアン-グロモフによって定義された不変量と一致することを証明することができた．とくに，このことは結合則がシューベルト不変量に対しても成り立つことを示している．

3 次元の 5 次超曲面に対するキャンデラスの公式は，次のような $T$ についての形式的べき級数に関する方程式である：

$$\frac{5T^3}{6} + \sum_{d>0} K_d e^{dT} = \frac{5}{2}(\frac{f_1}{f_0}\frac{f_2}{f_0} - \frac{f_3}{f_0}).$$

ここで，$T = \frac{f_1}{f_0}$, $K_d$ は上述のオイラー数である．また，$i = 0, 1, 2, 3$ に対して

$$f_i = \frac{1}{i!}(\frac{d}{dH})^i|_{H=0} \sum_{d\geq 0} e^{d(t+H)} \frac{\prod_{m=1}^{5d}(5H+m)}{\prod_{m=1}^{d}(H+m)^5}$$

である．これら $f_i$ は，$L$ を超幾何微分作用素

$$L = (\frac{d}{dt})^4 - 5e^t(5\frac{d}{dt}+1)\cdots(5\frac{d}{dt}+4)$$

とするとき，方程式 $L(f)=0$ の解空間の基底をなす．

多くの人々がこの公式を証明するために真剣な試みを行ってきた．ウィッテン [220] は線型シグマ模型の概念を定義し，モリソン-プレッサー [155] はこの概念を用いてキャンデラスの公式を正当化する試みを行った．成功には到らなかったものの，彼らの研究により線型シグマ模型の重要性が証明された．その後まもなく，コンツェビッチは，アティヤ-ボットの局所化を適用してキャンデラスの公式を証明する重要な試みを行った [111]．彼は 5 次超曲面に対して次数 4 の不変量を計算することに成功したが，その定式化は複雑すぎて一般に実行することは困難である．フロベニウス法において用いられる上の $H$（[97] を見よ）が同変超平面類として解釈されることに注意しておくことは重要である．コンツェビッチに続いて，ジーヴェンタール [69] は，ウィッテンおよびその他の人々のアイデアを用いるとともに量子微分方程式（これはある標準的に定義される接続の平坦切断を定めるための方程式に他ならない）を導入して，別の試みを行った．しかしながら，マックス・プランク数学研究所のプレプリント 96–113 において，マニンは「ジーヴェンタールは同変量子コホモロジーを導入することによりコンツェビッチのアプローチを豊かなものにした．一方，彼の議論を完全なものにするにはまだいくらかの作業が必要である」と述べている．最終的に，ウィッテン，コンツェビッチ，リー-ティアンの研究とオイラー・データの概念についてのいくつかの新しいアイデアに基づいて，1997 年にリアン-リウ-ヤオ [131] はキャンデラスの公式の最初の完全な証明を与えた．1998 年中頃までに，プロチェリ等およびパンドハリパンデによる 2 つの論文 [14], [162] が出版された．論文 [69] にあるギャップは，[131], [14], [162] を用いて修正することができる．最近になって，コックスとカッツはこのあたりの事情についての書物を書き，アメリカ数学会から出版されている．さらに歴史的なことについては，プロチェリ等およびコックス-カッツを参照されたい．（双対性のテストにとって）ずっと重要な，トーリック多様体に対する多重モジュライの場合を扱ったリアン-リウ-ヤオの論文も *Asian Journal of Mathematics* に発表されている．

リアン-リウ-ヤオの研究はミラー多様体の構成を与えていないが，一方多くの興味深い数学上の問題を提出している．この理論は，代数多様体の写像空間シグマ模型上の特性類の理論あるいは K 理論として解釈されるべきもの

である．このようなシグマ模型の1つの利点は，考える写像を固定された位相型をもつ曲線からの写像に限定することができ，結果として有限次元の写像空間を扱えばよいという点である．

リアン-リウ-ヤオの理論に関わる重要な問題は次のようなものである：代数多様体 $M$ 上の代数的ベクトル束 $V$ と種数 $g$ の曲線から $M$ への写像でホモロジー類が $k \in H_2(M,\mathbb{Z})$ であるものの安定モジュライ空間 $\mathcal{M}(g,k)$ が与えられたとき，$H^0(C,f^*V)-H^1(C,f^*V)$ （$f:C \to M$ は $\mathcal{M}(g,k)$ の元である）を見ることにより $\mathcal{M}(g,k)$ 上の仮想的ベクトル束 $\widetilde{V}$ を構成することができる．特性類の理論，すなわち正則ベクトル束のなす環にホモロジー類（これは代数的サイクルに精密化できる）を対応させる写像 $b$ が与えられたとき，$b(\widetilde{V})$ を考えることができ，さらに $b(\widetilde{V})$ に関係するいくつかの数値を考えることができる．例えば，$b(\widetilde{V})$ をリー-ティアンによってモジュライ空間上の仮想的サイクルとして定義された（続いてベーレント-ファンテチ [11] によっていくらか異なる方法によって理解された）リー-ティアン類 [124] 上で評価することができる．あるいは，$b(\widetilde{V})$ と $\mathcal{M}(g,k)$ のトートロジカル直線束のチャーン類との積を考え，これをリー-ティアン類上で評価することもできる．リアン-リウ-ヤオの方法を用いて，大きなクラスのベクトル束 $V$ と $M$ に対してこれらの数値を計算することが可能である．このクラスは，例えばトーリック多様体あるいは気球多様体上の凸あるいは凹ベクトル束を含む．$b(\widetilde{V})$ の計算は，代数多様体のシグマ模型上のK理論の一部と見なすことができる．

可能な限り最も一般的な設定においてリアン-リウ-ヤオの計算を実行することは重要である．同様に重要なのは，計算によって得られた数値の幾何学的意味を解釈することである．$b$ がオイラー類で $H^1(C,f^*V)=0$ の場合には，この数値は種数 $g$ の曲線の「個数」の数え上げに関係するものとして解釈される．$\mathbb{CP}^4$ の一般的な5次超曲面内の有理曲線の個数はこのようにして計算される．その場合には，$V$ を $\mathbb{CP}^4$ 上の直線束 $\mathcal{O}(5)$ にとることになる．$V$ が $\mathbb{CP}^2$ 上の直線束 $\mathcal{O}(-3)$ である場合には，「局所ミラー対称性」に現れる数値，すなわちカラビ-ヤオ多様体に超曲面として埋め込まれた $\mathbb{CP}^2$ 内の有理曲線の「個数」を扱っていることになる（クレム等の研究，例えば [108]，およびチアン-クレム-ヤオ-ザスロウの最近の研究 [42] を見よ）．シグマ模型

上のこれらの特性数全体の集合は，ゲルファント-カプラノフ-ゼレヴィンスキ [63, 64] の超幾何級数と密接に関係している．これらの数値の内部構造を，$M$ のK群からの写像として理解できれば非常に面白いだろう．これらの数値の幾何学的意味は何だろうか？ これらの数値のいくつかは，有理型 1 次微分形式によって定義される葉に含まれる曲線の個数と関係しているかもしれない．

$b$ がオイラー類の場合，リー-ティアンの注目すべき結果によれば，これらの数値の計算は与えられたシンプレクティック構造と両立する一般的な概複素構造に関する擬正則曲線の個数を（符号を除いて）数えることと同等である．リアン-リウ-ヤオの証明を用いれば，リー，ルアンおよびティアンの方法を拡張して母関数の係数 $n_d$ が整数であることを示せるはずである．このことは数論および組合せ論の双方の専門家にとって極めて興味深いはずである．超幾何級数から母関数へのこの変換はミラー変換とよばれる．適切な座標を選ぶことにより，ミラー変換は係数が整数であるようなきれいな $q$ 展開をもつということも注目に値する事実である．（このことは，細野-クレム-ティーセン-ヤオ [97] によって実験的に計算され一般に知られるところとなった.） ミラー多様体の変形の自由度が 1 次元の場合には，この整数性条件はリアン-ヤオ [135] によって確認された．これは非常に重要な事実であり，リアン-ヤオによって有理曲線の個数の可除性に関する諸性質を証明する際に利用された．例えば，5 次超曲面内の有理曲線の個数 $n_i$ は，$i$ が 5 で割りきれない場合には 125 で割りきれることが証明されている．しかしながら，そのようなミラー写像の整数性は多変数の場合に対しては知られておらず挑戦的な問題を提示している．カラビ-ヤオ多様体が 1 次元あるいは 2 次元の場合には，ミラー写像は $j$ 関数と関係していることに注意しておく．実際，リアン-ヤオ [132, 133, 134] は，カラビ-ヤオ多様体が K3 曲面かあるいは K3 曲面からなる束（pencil）を含む場合に，ミラー写像がモンスター群に関連するムーンシャイン予想に現れる保型形式と関係している可能性について考察している．チャック・ドラン [52] は，彼のハーバードでの学位論文において，パンルヴェの第 VI 方程式とその代数的解を詳細に研究し，この問題に関して著しい進展をなした．

ストリング理論の最近の進展における双対性予想は，ムーア-ウィッテンの研

究 [154] によって示されたように数論に明白に関与している．また，G. ムーアは変分原理によって決定されるモジュライ空間上のある特別な点におけるミラー写像の値に関する問題を提示している [153]．これらの問題の全体は，ミラー対称性の理論に数論の非常に豊かな構造が隠れていることを暗示している．クレム-リアン-ロアン-ヤオ [107] はミラー写像に対してシュワルツ方程式の一般化を展開した．有理曲線の個数の可除性に関する諸性質の発見はそのような方程式に基づいている．

リアン-リウ-ヤオの理論は，数え上げ幾何における多くの重要な問題に取り組むことを可能にするが，ミラー対称性の幾何学的意味を説明していない．一方，上で言及したように，ストロミンジャー-ヤオ-ザスロウ [192] の構成はそのような枠組みを与えている．ヴァッファ[213] は，最近 SYZ 予想をその描像の中にベクトル束を含む形に拡張した．グロス [79, 80] とヒッチン [91] は SYZ 予想について重要な進展をなしたが，SYZ の理論の完全な理解は未だ遠い彼方にある．欠けている重要な道具は，一般のカラビ-ヤオ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体と与えられたラグランジュ部分多様体上に境界をもつ正則円板の明示的な構成である．いずれにせよ SYZ の描像はおそらく正しく，これをリアン-リウ-ヤオの厳密な取り扱いと結び付けることができれば非常に面白い．この描像はリッチ平坦計量の構成を予言しており，うまくいけばインスタントンからの半平坦計量への寄与を理解することによって実行できよう．

何年も前に，向井 [156] は K3 曲面上の $SU(n)$ 束のモジュライ空間は自然な超ケーラー構造をもつことを考察した．(この事実は他の超ケーラー多様体に一般化できる.) 彼は向井変換の概念を導入したが，これは上述の理論と明らかに関係している．うまくいけばこれらすべてのアイデアを包含する完全な数学理論がまもなく見出されるだろう．

すべての 3 次元カラビ-ヤオ多様体，および楕円ファイバー空間の構造をもつ 4 次元カラビ-ヤオ多様体を分類することはもう 1 つの重要な問題である．密接に関連した問題として，$G_2$ および Spin(7) ホロノミー群をもつ多様体の構成を理解するということがある．

ごく最近になってジョイス [104, 105] がそのような多様体の非自明な例を構成することに成功した．(より最近になって，クリスティーナ・テイラーも

3 次のベッチ数が零であるような例を構成している.）それらは，C. タウベス [194] による 4 次元多様体上の自己双対 $SU(2)$ 接続の構成と類似の特異摂動の手法によって得られる．これらの多様体はストリング理論の最近の進展において明らかに重要な役割を果たしているが，その大域的な構造は難解で未だ理解されていない．そのような多様体の全体をどのようにしてパラメータ付ければよいか？ それらは系統的な仕方でケーラー多様体に関連しているだろうか？ これらの多様体あるいはカラビ-ヤオ多様体上の特殊ホロノミー群をもつベクトル束のモジュライ空間をどのようにして理解することができるだろうか？ これらの多様体に対するミラー対称性は正確には何か？

ストリング理論の最近の展開によれば，与えられたカラビ-ヤオ多様体が別のカラビ-ヤオ多様体に変形できる必要がある．これらの多様体は異なる位相型をもち得るので，そのような変形を実現するには特異点をもつ多様体を経由する必要がある．また，同じ共形場理論をもつ多様体を同一視することも許される．アスピンウォール-グリーン-モリソン [4] は，多様体の位相型を変える「フロップ」構成が起こる場合に，カラビ-ヤオ多様体の共形場理論の変化を研究した．また，グリーン-モリソン-ストロミンジャー [71] は多様体が変形されて錐特異点を生じる際に量子場の理論がどのように変わるかを議論した．これらの理論は，像空間が特異点をもつ場合でさえもよい物理的理論が存在する可能性を示している．これは像空間が特異点をもつ場合でさえもよい幾何学的理論が展開できることを意味しているはずである．これはそのような特異点をもつ多様体上のよい計量，よいホッジ理論，よいベクトル束の理論，そしてよい数え上げ幾何を含んでいる．そのような幾何は上で言及した量子場の理論を反映しているはずである．とくに，滑らかな多様体が特異点をもつ多様体に近づく際に,「量子」幾何の極限をとらえる新しい幾何学的量を見出すことが望まれる．特異点に崩壊するサイクルを表す超対称サイクルは，これらすべての議論において重要な役割を果たすであろう．

異なるカラビ-ヤオ多様体をつなぐという議論において，とくに重要な手続きが M. リード [170] によって提案された（初期のアイデアはクレメンス [45] に遡る）．負の法束をもつ有理曲線をブローダウンすることにより，カラビ-ヤオ多様体の 2 次のコホモロジーをつぶすことができる．結果として得られる特異な多様体の複素構造を滑らかな複素多様体のそれにいかにして変形する

かに関して，クレメンス [44]，フリードマン [55]，ティアン [200] の諸定理がある．これらの多様体は代数的とは限らない(ただし，代数的多様体に双有理的にはなる)．リードは，この種の手続きを通じてすべての 3 次元カラビ-ヤオ多様体をつなぐことを提案した．これはかなり魅力的な予想である．しかしながら，平滑化によって得られる多様体はケーラーではないので，リッチ平坦計量によって与えられるのと同様の性質を説明するために，何らかの標準的なエルミート計量を定義する必要がある．そのような標準的計量に基づくモジュライ空間上のヴェイユ-ピーターソン計量は，ミラー写像を特定するのに役立つはずであるから重要であろう．

数年前にザスロウと筆者 [226] は，K3 曲面内の結節点をもつ特異有理曲線の数え上げと保型形式の間の関係を示した．この等式を動機として，ゲッチェ [70] はより一般のケーラー曲面 $X$ に対して次の予想を立てた：

$C$ を $X$ 上の十分に豊富(ample)な因子とし，$K$ を標準因子とする．このとき，$r=-KC+g-\chi(\mathcal{O}_X)$ 個の点を通る $|C|$ 内の種数 $g$ の曲線の個数は，$q$ に関する次のべき級数における $q^{\frac{1}{2}C(C-K)}$ の係数によって与えられる：

$$B_1^{K^2}B_2^{CK}(DG_2)^r\frac{D^2G_2}{(\Delta(D^2G_2))^{\chi(\mathcal{O}_X)/2}}.$$

ここで，$D=q\frac{d}{dq}$, $G_2$ はアイゼンシュタイン級数

$$G_2(q)=-\frac{1}{24}+\sum_{k>0}(\sum_{d|k}d)q^k,$$

$\Delta$ は判別式

$$\Delta(q)=q\prod_{k>0}(1-q^k)^{24}$$

であり，$B_i(q)$ はある普遍なべき級数である．

ブライアン-ルン [20] は，コホモロジー類が原始的な場合に，K3 曲面に対するヤオ-ザスロウの公式の厳密な証明に向けて最初の一歩を踏み出した．A.-K. リウ [139] が最近一般のケーラー曲面に対する公式を得たことは注目すべきである．(いくつかの特別な場合は T.-J. リーと共同で得られた.) サイバーグ-ウィッテン不変量の族の考え方を用いて，彼は楕円ファイバー空間の構造をもつ 3 次元代数多様体に対しても同様の問題を調べている．曲線の

数え上げに対する母関数が保型形式と関係しているという事実はかなり神秘的である．おそらくこれらの保型形式に関する一般化された理論が近い将来に展開されるだろう．$B_i(q)$ はどのような性質をもつだろうか？

WDVV 方程式とミラー対称性の理論以外に，サイバーグ-ウィッテン方程式の理論がある．タウベス [196] は，サイバーグ-ウィッテン不変量がシンプレクティック多様体における擬正則曲線の数え上げに関係していることを初めて明らかにした．この結果は，4 次元におけるシンプレクティック多様体の構造の研究の土台となっている．$\mathbb{CP}^2$ 上のシンプレクティック構造は唯一つであるという事実は，基本的にタウベスの定理の自明な系である．（これがホモトピー $\mathbb{CP}^2$ に対して正しいか否かは今もって知られていない．筆者は，シンプレクティック構造がケーラーの場合にこの事実が成り立つことを証明した.） $\mathbb{CP}^2$ に関するタウベスの定理は，T.-J. リーと A.-K. リウによって他の有理曲面に一般化された [123].

カラビ-ヤオ多様体の分類に戻って，そのような多様体の間の幾何学的なコボルディズムを理解することは面白い問題であろう．2 つの 3 次元カラビ-ヤオ多様体は，適当な境界条件が課されたとき，いつ $G_2$ ホロノミーをもつ 7 次元多様体の境界となるだろうか？ $G_2$ 多様体に対しては，もちろんそれらが境界となる Spin(7) 多様体を探すことが意味をもつ．

ストリング理論の最近の進展から，次のような興味深い問題が生じる．コンパクト多様体 $N$ 上の距離錐であるような多様体 $M$ が特殊ホロノミー群をもつとする．このとき $N$ はどのような制約を受けるだろうか？ この問題は $M$ がカラビ-ヤオ多様体の場合にとくに興味深い．

正のリッチ曲率をもつ多様体に対しては，筆者によるカラビ予想の解決は正のリッチ曲率をもつコンパクトケーラー多様体の位相の完全な理解を与えた．（ティアンと筆者 [205] は正のリッチ曲率をもつ非コンパクトなケーラー多様体についても実質的な進展をなしているが，まだなすべき仕事が残されている．例えば，そのような多様体がすべてコンパクト化できるか否かは明らかになっていない.） 多様体がケーラーでない場合には，事情は全く異なり，異種球面に対してすら解答がない．次のような綺麗な予想がある：

異種球面がスカラー曲率が正の計量をもつのは，スピン多様体の境界となるときそしてそのときに限るであろう．異種球面がリッチ曲率が正の計量を

もつのは，平行化可能な多様体の境界となるときそしてそのときに限るであろう．異種球面が断面曲率が正の計量をもつのは，コンパクト多様体上のベクトル束として表されるときそしてそのときに限るであろう．

最初の主張は，シェーン-ヤオ [182] およびグロモフ-ローソン [77] の手術(サージェリー)に関する結果を用いると，シュトルツ [189] の定理によって正しいことが分かる．また，第 2，第 3 の主張の十分性の部分も正しいことが知られている．

チーガー-グロモル [37] の有名な定理により，リッチ曲率が非正の多様体の研究は，基本群が有限なものの研究に基本的に帰着する．すべての有限群が正のリッチ曲率をもつコンパクト多様体の基本群として現れるだろうか？ おそらく，この問題は，正の第 1 チャーン類をもつ代数的多様体に対してすでに肯定的であろう．正のリッチ曲率をもつ単連結な多様体の連結和が，リッチ曲率が正の計量を許容するか否かは明らかでない．より一般に，有限な基本群をもつコンパクト多様体がスカラー曲率が正の計量を許容するならば，リッチ曲率が正の計量も許容するだろうか？ シュトルツ [190] は，リヒネロヴィッツの有名な定理を次のようにしてループ空間に一般化することを提案している：$M$ のリッチ曲率が正で $\frac{1}{2}p_1(M)$ が零ならば，$M$ のウィッテン指数は零になる．ここで，$\frac{1}{2}p_1(M)=0$ という式は，$M$ のループ空間がスピンであることと解釈されることに注意する．この問題は，その主張が $M$ が効果的な $SU(2)$ 作用をもつときには(曲率に関する仮定なしに)正しいということを証明したケーフェン・リウ [140] の美しい定理に動機付けられていることにも注意しておく．リウの定理はローソン-ヤオ [115] の定理のループ空間における類似である．曲率に関する性質がウィッテン種数のモジュラー性にどのように影響するかを見ることも興味深い問題である．

正のリッチ曲率をもつ多様体がスカラー曲率が正のアインシュタイン計量を許容することに対する障害があるか否かを明らかにできれば非常によいだろう．5 次元以上においてはおそらく障害は存在しないと考えられる．多様体がケーラーの場合ですら，スカラー曲率が正のケーラー-アインシュタイン計量の存在は未解決問題である．そのようなケーラー多様体の自己同型群が簡約的であるという事実(松島の定理 [144])および二木不変量 [59] が零になるという事実に基づく障害が知られているが，筆者は，鍵になる障害はマン

フォードとギーゼカによって幾何学的不変式論の枠組みで定義された偏極複素構造の安定性から来ると信じている．G. ティアン [201] は，（複素 2 次元における問題の解決 [199] の他に）$K$ 安定性の概念を導入することにより，この予想に向けて最初の大きな一歩を踏み出した．

R. ハミルトンの方程式がこの問題に対して有用である可能性がある．彼の方程式は複素構造を保ち，ツァオ [32] は方程式の時間大域解の存在を示している．ハルナック不等式のような基本的な評価もツァオ [33] によって得られている．ツァオの定理は曲率に関する仮定をおいているが，それらを弱めることができれば有用であろう．いくつかのソリトン解もツァオ [34] によって見出されている．そのようなソリトン解をすべて分類することは重要な問題として残っている．ケーラー-アインシュタイン計量およびケーラーソリトンの一意性の問題はそれぞれ板東-満渕 [7] とティアン-ズー [206] によって扱われた．ハミルトン方程式の漸近挙動が安定性の問題に関係しているかもしれない．

正のスカラー曲率をもつ多様体上に，スカラー曲率が正のケーラー-アインシュタイン計量が必ず存在するとは限らないので，アインシュタイン計量より多少一般的な計量のクラスを探すことはおそらく興味深い．コナン・ルンのアイデアにより，いくらかより一般的な計量のクラスにたどり着くことができる（彼の最近の論文 [119] を見よ）．一方ルンはそのような計量の存在が二木不変量の消滅を導くことを示している．これらの計量は研究すべき最も一般的な標準計量かもしれない．量子コホモロジーとの関連の可能性を調べることも有用かもしれない．

## II.3　スカラー曲率

スカラー曲率は，次元が 2 より大きいコンパクト多様体に対する最も弱い不変量の 1 つであるが，古典的な一般相対性理論において重要な役割を果たす．スカラー曲率は基本的にローレンツ計量を空間的超曲面に制限したときの質量分布を表す．（厳密な意味での質量分布は，空間的超曲面の第 2 基本形式からの寄与を含んでいる．）

通常の質量密度は非負であると仮定されるので，上の物理的解釈によれば，スカラー曲率が正になる場合の方が負になる場合よりもずっと重要である．物理的直観は，正のスカラー曲率をもつ多様体の理論の発展にとって非常によい道しるべになる．

最初に達成された結果はディラック作用素から得られる．リッヒネロヴィッツは次の消滅定理を証明した [136]：スピン多様体に対しては，アティヤ-シンガー指数定理により，スカラー曲率の正値性は多様体のある KO 特性数の消滅を導く．ずいぶん長い間，この結果は唯一知られた位相的制約であった．その後 1973 年にスタンフォードで開催された微分幾何の研究集会において正質量予想の問題が取り上げられた．ただちに，3 次元トーラス上にスカラー曲率が正の計量が存在するか否かという問題が，この問題をずっと単純にした問題であることが認識された．シェーンと筆者は，そのような計量が存在しないことをなんとか証明することができた [180]．証明は，非圧縮的極小曲面の存在（この結果はザックスとウーレンベックによっても独立に得られている [175]）と第 2 変分公式の綿密な検討に基づいている．とくに，我々は次のことを証明した：3 次元多様体の基本群が種数 2 以上の閉曲面の基本群に同型な部分群を含むならば，その多様体はスカラー曲率が正の完備計量を許容しない [183]．

1978 年までに我々は正質量予想を完全に解決し [181]，さらにスカラー曲率が正の計量に関する定理を高次元に一般化することができた [182]．証明の基本原理は，次元に関する帰納法を用いることである．我々は，スカラー曲率が正の多様体内の安定な極小超曲面に対して，（第 2 変分作用素の第 1 固有関数を用いることにより）その計量をスカラー曲率が正の計量に共形的に変形できることを考察した．そのような極小超曲面の存在は，器の多様体の位相的性質によって保証される．例えば，多様体の 1 次元のコホモロジー類が，非自明な交叉を与えるぐらい十分豊富に存在する必要がある．

同じ年に，正質量予想の証明からのアイデアを用いることにより，正のスカラー曲率をもつ多様体のカテゴリーにおいて，余次元 3 までの手術（サージェリー）が行えることを示した [182]．（我々の仕事に続いて，この基本的な事実はグロモフとローソンによっても幾分異なる構成によって得られている [77].） この手術に関する結果は，正のスカラー曲率をもつ多様体にスピン・

コボルディズム理論の道具を適用することを可能にした．シュトルツ [189] は次の重要な結果を証明した：単連結多様体のクラスに対しては，スカラー曲率が正の計量の存在に対する障害はリッヒネロヴィッツの結果に基づくものがそのすべてである．

我々はリッヒネロヴィッツ消滅定理の単連結でない多様体への一般化に関連するいくつかの予備的な結果を得ていたが，グロモフとローソンはこれについて包括的な理論を展開した．彼らは，$KO[\pi_1]$ からの障害の消滅がスカラー曲率正の計量の存在に対する適切な十分条件であろうと考えた [78]．シック [176] の最近の仕事は，極小超曲面に関わるシェーンと筆者の仕事から生じる障害が考慮されていないという事情によって，彼らの予想が正しくないことを示している．

多様体が正のスカラー曲率をもつ計量を許容するための必要十分条件を見出すという問題は未解決である．1 つの興味深い問題は，多様体 $M$ がある群 $\pi$ に対して $H^*(K(\pi,1),\mathbb{Q})$ の非自明なホモロジー類を与えるならば，正のスカラー曲率をもつ計量を許容しないことを証明するというものである．1981 年にシェーンと筆者がバークレーで行った正のスカラー曲率をもつ多様体に関する講義において，我々はこの問題を $\dim M \leq 4$ の場合に解決した．ここ 10 年の間に A. コンヌおよびその他の人々による作用素環論からのアイデアを用いる仕事があった(例えば，[9] を見よ)．しかしながら，問題の最終的な解決には至っていない．手術に関する議論は $\dim M \leq 4$ の場合にはそれほど重要でない．シェーンと筆者の結果は，正のスカラー曲率を許容する 3 次元多様体はいくつかの基本群が有限な多様体と $S^2 \times S^1$ のいくつかのコピーの連結和に限ることを示している [183]．ポアンカレ予想と球面的空間形予想が正しければ，この結果の逆も成り立つ．

$\dim M = 4$ のとき，最良の結果は T.-J. リーと A.-K. リウによる [122]．彼らはシンプレクティック多様体が正のスカラー曲率をもつ計量を許容するための必要十分条件を与えた．

位相に関係する問題を離れても，正のスカラー曲率をもつ多様体の幾何は，相対性理論における問題と密接に関係しているため，実り多い主題である．例えば，(シェーンと筆者 [184] による)次の言明はブラックホールの理論において重要である：

コンパクト3次元多様体 $M$ に対して，作用素 $-\Delta_M + \frac{1}{2}R_M$ の(ディリクレ境界条件に関する)第1固有値は $\frac{4\pi^2}{3r^2}$ によって上から押えられる．ここで，$r$ は $M$ 内のジョルダン閉曲線 $\sigma$ のまわりのチューブで，その内部において $\sigma$ がホモトピー的に自明であるようなものの半径の最小値である．

このタイプの結果を高次元多様体に一般化することができるはずである．

正質量予想の境界付きのコンパクト多様体に対する適切な定式化が望まれるが，今のところ知られていない．

20年前にペンローズは，ブラックホールの全質量はその面積の平方根のある定数倍より大きいという一般相対論における予想をたてた．空間的超曲面が非正のスカラー曲率をもつとき，この予想は最近ヒュースケン-イルマネン [101] とブレイ [19] によって肯定的に解決された．スカラー曲率が非正でない場合は未解決問題として残されている．

一般相対論において生じる興味深い問題の1つに次のようなものがある：非正のスカラー曲率をもつコンパクト3次元多様体 $M$ に対して，その内部に安定な極小閉曲面が含まれていなければ，境界 $\partial M$ のホーキング質量は $\partial M$ の直径のある定数倍以下であろう．もちろん，そのような主張のスカラー曲率が非正でない多様体への一般化もある．これらの主張はブラックホールの生成と関係している．

# III 結論

いくつかの重要な問題を書き留めることによってこの報告の中心的テーマのいくつかを要約しておくことはおそらく適当であろう．

1. $n$ 次元多様体の $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元ユークリッド空間への等長埋め込みの存在と一意性の本質を正確に理解せよ．多様体がコンパクトで境界をもたないとき，非自明な等長的変形が存在し得るだろうか？

2. 完備な多様体のラプラシアンのスペクトルを理解せよ．正の実数からなる離散的な集合が，ある多様体のラプラシアンのスペクトルになるための正確な条件は何か？ これまで知られているのは必要条件だけである．多様体が特殊な構造をもつとき，例えばアインシュタイン計量をもつとか極小部分多

様体であるとき，対称性がより高いことが期待される．(この対称性は，おそらく付随するゼータ関数において観察される.) 一般的な計量に対して，スペクトルは計量を決定するはずである．そのような主張をどのようにすれば証明できるだろうか？

3. $\mathbb{R}^n$ あるいは $S^n$ 内の極小部分多様体の大きなクラスを書き下すための(ワイエルシュトラスの表示法に類似する)具体的な方法を見つけよ．すべてのカリブレートされた極小部分多様体をそのような具体的な方法によって構成できるだろうか？ 器の空間が特殊ホロノミー群をもつ場合に，そのような極小部分多様体を構成できればとくに面白い．(カラビ-ヤオ多様体の場合には，特殊ラグランジュ部分多様体を見ることになる.) このような極小部分多様体のモジュライ空間を決定せよ．

4. アインシュタイン計量をもつ滑らかなコンパクト多様体を分類せよ．$\dim M > 4$ ならば $M$ は常にアインシュタイン計量をもつだろうか？ もしそうなら，それらをパラメータ付ける方法は何か？

5. 特殊ホロノミー群をもつコンパクトリーマン多様体を分類せよ．主要なホロノミー群は，$SU(n)$，Spin(7) および $G_2$ である．各次元に対して，そのような多様体の変形空間は高々有限個の連結成分しかもたないことを証明せよ．

6. $n > 2$ のとき，$M^{2n}$ が概複素構造を許容すれば，可積分な複素構造も許容することを証明せよ．

7. 複素多様体がケーラー構造を許容するための必要十分条件を見つけよ．任意のケーラー多様体が代数多様体に変形できることを証明せよ．

8. 代数多様体上の複素ベクトル束 $V$ でチャーン類が $(k, k)$ 型であるものが与えられたとき，$K$ 理論の意味で $V$ に正則ベクトル束を加減することにより，正則構造をもつようにできるだろうか？ 有理的な $(k, k)$ 型のコホモロジー類が代数的サイクルのポアンカレ双対であろうというホッジ予想を証明せよ．

9. 楕円型変分問題の解の特異点集合の構造はどのようなものか？ とくに，面積最小集合の特異点集合の構造はどのようか？ そのような特異点集合は，器の空間の計量の摂動の下で安定か？ 平均曲率流およびリッチ流の解の特異点集合はどのようなものか？

10. カラビ-ヤオ多様体に対してミラー対称性の概念の完全で厳密な幾何学的説明を与えよ．そのような概念は，特殊ホロノミー群をもたない他の幾何学的構造に対しても存在するだろうか？ インスタントン数の母関数の構造およびミラー対称性に由来するミラー写像の構造を説明せよ．これらの関数の数論的意味は何だろうか？

## IV 補遺

報告(展望[1])の執筆以来，ミラー原理について多くの進展があった．以下では，我々の論文 [233] 以後に得られた結果のいくつかについて簡単に議論する．

まずもって，[233] において射影空間に対して初めて実行され，次に [234] および [235] において一般のトーリック多様体に対して一般化された凹なベクトル束に対するミラーの計算が，ストリング理論における局所ミラー対称性，とくにサイバーグ-ウィッテン理論とかなり興味深い関連をもつことが明らかになったのは，筆者にとって喜ばしいことだった．

関手的局所化公式は我々が一連の論文 [233-236] において発見し用いた単純だが基本的な技法であり，曲線のモジュライ空間上の 3 つ組ホッジ積分に対するマリノ-ヴァッファ公式の最近の証明を含め，この公式の多くの重要な応用が見出された．関手的局所化公式の重要性は，安定写像の複雑なモジュライ空間上での計算を，線型化されたモジュライ空間のようにずっと単純な空間上の計算に帰着させる点にある．

我々は，トーリック多様体と等質多様体を含む気球多様体に対して一般的なミラー原理を証明するために，[234] および [235] において我々の方法を拡張した．ここではまず，1 つのトーリックの例を記述し，後にグラスマン多様体に対する堀-ヴァッファの公式 [231] について詳しく議論する．$X$ をトーリッ

[1] (訳注) 2000 年に出版された本書英語版原文のこと．本節は，この日本語版のために著者が新たに執筆した英文原稿からの翻訳である．

ク多様体とし，$D_1,..,D_N$ を $T$ 不変な因子とする．$V=\oplus_i L_i$ $(c_1(L_i)\geq 0)$ を直線束の直和で $c_1(X)=c_1(V)$ をみたすものとする．$d$ 次安定写像のモジュライ空間の仮想的基本サイクル上で引き戻しベクトル束のオイラー類を積分したものを $K_d$ とする．ここで，$d$ は $H_2(X,Z)$ の元であり，ケーラー類の基底 $H=(H_1,\cdots,H_k)$ を選ぶことにより多重指数と見なしている．$A$ 級数 $A(T)=\sum K_d e^{d\cdot T}$ と $B$ 級数

$$B(t)=e^{-H\cdot t}\sum_d\prod_i\prod_{k=0}^{\langle c_1(L_i),d\rangle}(c_1(L_i)-k)\frac{\prod_{\langle D_a,d\rangle<0}\prod_{k=0}^{-\langle D_a,d\rangle-1}(D_a+k)}{\prod_{\langle D_a,d\rangle\geq 0}\prod_{k=1}^{\langle D_a,d\rangle}(D_a-k)}e^{d\cdot t}$$

という 2 つの母関数を導入する．

$A$ 級数 および $B$ 級数という用語は，ストリング理論におけるいわゆる $A$ 模型と $B$ 模型に由来する．[234] および [235] において証明されたミラー原理の 1 つの帰結によれば，具体的に計算可能な関数 $f(t),g(t)$ が存在して

$$\int_X\left(e^f B(t)-e^{-H\cdot T}e(V)\right)=2A(T)-\sum T_i\frac{\partial A(T)}{\partial T_i}$$

$(T=t+g(t))$ という関係式が成立する．この方程式を解いて，容易に級数 $A(T)$ を求めることができる．級数 $B(t)$ に現れる分母と分子は，いずれもある同変束の(仮想的)同変オイラー類であることに注意する．仮想的基本サイクル上の局所化に基づくこの公式の唯一の数学的に厳密な証明は，[235] で与えられた．

[236] において，ミラー原理を種数が高い場合へ拡張することを開始した．我々の一般的理論のほとんどはその場合にも通用し，種数が高い場合の計算についても多くの部分的結果が得られた．計画を完結するためにはオイラー・データの次数を扱う必要がある．ミラー原理の証明においては，基本的な対象はモジュライ空間の線型化であり，そこから超幾何級数が局所化において自然に現れる．種数が高い場合を完結するための第 1 段階として，[239] において我々はウィッテンの線型シグマ模型から誘導される高い種数の安定写像に対する精密化された線型化モジュライ空間を構成し，$A$ 捩れモジュライ

空間と名付けた．これは写像のモジュライ空間の新しくより簡単なコンパクト化である．

関連する話題として，ラグランジュ部分多様体に境界をもつ正則円板の数え上げ，あるいはより一般にラグランジュ部分多様体に境界をもつ開リーマン面の数え上げがある．ストリング理論からの多くの興味深い予想がある．C.-H. リウおよび K. リウとともに，我々はモジュライ空間の線型化を構成しており，これにより写像のモジュライ空間の新しいコンパクト化が得られる．

種数の高い場合にミラー原理を証明するにあたって，オイラー・データを計算するためにモジュライ空間上の種々のホッジ積分が必要になる．[240] において，マリノ-ヴァッファは，曲線のモジュライ空間上のすべての 3 つ組ホッジ積分の母級数に関する驚くべき公式を予想している．この予想は，チャーン-サイモンズ理論とストリング理論の間の大きな $N$ に対する双対性に基づいてなされており，この級数が対称群の表現に関するある公式によって与えられると主張する．C.-C. リウ，K. リウおよび J. ゾウは，関手的局所化公式を用いることにより，組合せ論および幾何に由来する微分方程式を見出すことにより証明を与えた．詳しくは [238] を見よ．

ここで，ミラー原理の最近のもう 1 つの応用，すなわち堀-ヴァッファの公式 [231] への応用について要約しておこう．この公式は，(1) 自明な特性類 1 を指定したグラスマン多様体 $Gr_r(\mathbf{C}^n)$ の $A$ 級数と (2) 射影空間の直積の $A$ 級数を関係付ける．これについて，歴史とともに簡単に紹介しておこう．

2000 年に，堀-ヴァッファは等式

$$(*)\qquad A^X(t) = e^{(r-1)\pi\sqrt{-1}\sigma_1/\alpha}\frac{1}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)} \prod_{i<j}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x_i} - \alpha\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Big|_{t_i = t+(r-1)\pi\sqrt{-1}} A^{\mathbf{P}}(t_1, \ldots, t_r)$$

を導いた．ここで，$\sigma_1$ は $H^2(X, \mathbf{Z})$ の正の生成元であり，$X := Gr_r(\mathbf{C}^n)$，$\mathbf{P} := (\mathbf{P}^{n-1})^r$ とおいている．また，$\alpha$ は($\mathbf{P}^1$ への標準的 $S^1$ 作用に関する

重みを表す)形式的な変数，$x_i$ は $\mathbf{P}$ の第 $i$ 成分の超平面類である．自明な特性類 1 を指定した射影多様体 $Y$ の $A$ 級数を $A^Y$ で表すと，次が成り立つ([232] の p. 4 を見よ)：

$$A^Y(t) = e^{-H\cdot t/\alpha}\sum_d ev_*^Y\left(\frac{[F_0]}{e_{S^1}(\nu_{F_0}M_d(Y))}\right)e^{d\cdot t}.$$

堀-ヴァッファによる等式の導出は，大雑把にいうと次のようである(詳しくは [231] を見よ)．$G = U(r)$ をゲージ群とする非可換ゲージの線型シグマ模型を考える．彼らの超ポテンシャルの選び方により，真空の空間 $X = Gr_r(\mathbf{C}^n)$ が得られる．理論は種々の相をもっている．その中にはヒッグス相やクーロン相があり，それらの分配関数を比較することができる．適当なミラー変換により，クーロン相から空間 $\mathbf{P}$ のある明示的な周期積分が得られ，それは本質的に(∗)の右辺である．一方，ヒッグス相からは，$X$ の非線型シグマ模型が得られる．ミラー原理の言葉遣いでは，これは $A$ 級数 $A^X(t)$ である．

堀-ヴァッファの公式(∗)は，ミラー原理においても中心的な対象である 2 つの $A$ 級数 $A^X, A^{\mathbf{P}}$ (あるいはそれらの導関数)の間の関係を与えるので [233-235]，これらの $A$ 級数をミラー原理によるアプローチによって直接計算することは興味深い問題である．$A^{\mathbf{P}}$ に対する明示的な公式は以前から知られていた．それは [235] の系 5.4 の特別な場合であり，現在ではいくつかの異なるアプローチによって容易に導くことが可能である．[237] の第 1 節に簡単な解説がある．

(∗)の左辺の $A$ 級数 $A^X$ の計算には，ずっと多くの作業が必要である．[232] において我々は，まず安定写像のモジュライ空間 $M_d(X)$ のよい線型化を見つけることにより $A^X$ を具体的に計算した．正しい選択はグロタンディックの Quot スキーム $\mathrm{Quot}_{(d)}$ であることが判明した．射影空間のプリュッカー埋め込みと崩壊写像により，$M_d(X)$ から射影空間の線型化モジュライ空間への同変写像 $\psi$ が誘導される．ここで，計算の決定的な段階は，Quot スキームが $\psi$ の像の特異点解消に一致することの確認，および関手的局所化公式 [234], [235, 定理 3.12] により，$A^X(t)$ の係数の計算が，実は固定点集合の各連結成分 $E_{0s} \subset \mathrm{Quot}_{(d)}$ に対する $S^1$ 同変オイラー類

$$e_{S^1}(\nu_{E_{0s}}\mathrm{Quot}_{(d)})$$

の計算に帰着することの確認である．詳細は [232] の pp. 3-4 に明確に述べられている．よって，$A^X(t)$ をこのような仕方で計算するためには，$S^1$ 作用の固定点集合の各連結成分 $E_{0s}$ を注意深く記述し，その法ベクトル束の同変オイラー類を計算する必要がある．これらの段階もともに [232] において実行されている．この論文の定理 2.1.9 は，固定点集合の各連結成分を完全かつ具体的に記述しており，これらがグラスマン多様体上の旗束に他ならないことが分かる．定理 3.3.3 は，法束のオイラー類の標準ヤング図形に関する明示的な公式を与えている．したがって，$(*)$の左辺である $A^X(t)$ を計算する問題は，[232] において完全に解決されている．

[232] の出版以来，この論文が他の研究者の興味を惹いたことは喜ばしい．例えば，最近の論文 [230] において著者達は，我々が $U(n)$ の標準的な表現論を用いて行ったオイラー類の計算が，旗多様体上の標準的な同語反復列を用いても計算できることを考察した．彼らは，我々の Quot スキームを用いる手法および $A^X(t)$ を法束の同変オイラー類に還元する計算法にも解釈を与えている．彼らの計算結果はもちろん我々のものと一致する．

## 参考文献

[1] A.D. Alexandrov, *On a class of closed surfaces*, Recueil Math. (Moscow), **4** (1938), 69-77.

[2] M.T. Anderson, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geo., **18** (1983), 701-721.

[3] P.S. Aspinwall, B.R. Greene, K.H. Kirklin and P.J. Miron, *Searching for three-generation Calabi-Yau manifolds*, Nucl. Phys. B, **294** (1987), 193-222.

[4] P.S. Aspinwall, B.R. Greene and D. Morrison, *Calabi-Yau moduli space, mirror manifolds and spacetime topology change in string theory*, Nuclear Phys. B, **416**(**2**) (1994), 414-480.

[5] P.S. Aspinwall and D. Morrison, *Topological field theory and rational curves*, Comm. Math. Phys., **151** (1993), 245-262.

[6] T. Aubin, *Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes*, Bull. Sc. Math., **102** (1978), 63-95.

[7] S. Bando and T. Mabuchi, *Uniqieness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 11-40, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1987.

[8] S. Barannikov and M. Kontsevich, *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields*, Internat. Math. Res. Notices, **1998** (**4**), 201-215, alg-geom/9710032.

[9] P. Baum, A. Connes and N. Higson, *Classifying space for proper actions and $K$-theory of group $C^*$-algebras*, $C^*$-algebras: 1943-1993 (San Antonio, TX, 1993), 240-291, Contemp. Math., **167** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[10] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, *Fivebranes, membranes, and non-perturbative string theory*, Nucl. Phys. B, **456** (1995), 130-152, hep-th/9507158.

[11] K. Behrend and B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*, Invent. Math., **128**(**1**) (1997), 45-88.

[12] M. Berger, *Sur certaines variétés riemanniennes à courbure positive*, C. R. Acad. Sci., Paris, **247** (1958), 1165-1168. *Les variétés riemanniennes à courbure positive*, Bull. Soc. Math., Belg., **10** (1958), 89-104.

[13] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal., **5**(**5**) (1995), 731-799.

[14] G. Bini, C. De Concini, M. Polino and C. Procesi, *On the work of Givental relative to mirror symmetry*, math.AG/9805097.

[15] D.D. Bleecker, *Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra*, J. Diff. Geom., **43**(**3**) (1996), 505-526.

[16] F.A. Bogomolov, *Hamiltonian Kählerian manifolds*, Soviet Math. Dokl., **19** (**6**) (1979), 1462-1465.

[17] F.A. Bogomolov, *Surfaces of class* $\mathrm{VII}_0$ *and affine geometry* Math. USSR-Izv., **21**(**1**) (1983), 31-73.

[18] C. Böhm, *Inhomogeneous Einstein metrics on low-dimensional spheres and other low-dimensional spaces*, Invent. Math., **134** (1998), 145-176.

[19] H. Bray, *Proof of the Riemannian Penrose conjecture using the positive mass theorem*, preprint.

[20] J. Bryan and N.C. Leung, *The enumerative geometry of $K3$ surfaces and modular forms*, alg-geom/9711031, 1997.

[21] N.P. Buchdahl, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces*, Math. Ann., **280**(**4**) (1988), 625-648.

[22] D. Burns and M. Rapoport, *On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) **8**(**2**) (1975), 235-273.

[23] E. Calabi, *Improper affine hypersurfaces of convex type and a generalization of a theorem of Jörgens*, Michigan Math. J., **5** (1958), 105-126.

[24] E. Calabi, *Complete affine hyperspheres* I, Sympos. Math., **10** (1977), 19-38.

[25] E. Calabi, *Hypersurfaces with maximal affinely invariant area*, Am. J. of Math., **104**(**1**) (1982), 91-126.

[26] E. Calabi and L. Nirenberg, unpublished (see the introduction to [40]).

[27] P. Candelas, P.S. Green and T. Hübsch, *Rolling among Calabi-Yau vacua*, Nucl. Phys. B, **330** (1990), 49-102.

[28] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Vacuum configuration for superstrings*, Nucl. Phys. B, **258** (1985), 46-74.

[29] P. Candelas, M. Lynker and R. Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted* $\mathbb{P}^4$, Nucl. Phys. B, **341** (1990), 383-402.

[30] P. Candelas, X. de la Ossa, A. Font, S. Katz and D.R. Morrison, *Mirror symmetry for two-parameter models*, I, Nucl. Phys. B, **416**(**2**) (1994), 481-538.

[31] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green and L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. B, **359** (1991), 21-74.

[32] H.D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds*, Invent. Math., **81**(**2**) (1985), 359-372.

[33] H.D. Cao, *On Harnack's inequalities for the Kähler-Ricci flow*, Invent. Math., **109**(**2**) (1992), 247-263.

[34] H.D. Cao, *Existence of gradient Kähler-Ricci solitons*, Elliptic and parabolic methods in geometry (Minneapolis, MN, 1994), 1-16, AK Peters, Wellesley, MA, 1996.

[35] E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Pol. Math., **6** (1927), 1-7.

[36] F. Catanese and C. LeBrun, *On the scalar curvature of Einstein manifolds*, Math. Res. Lett., **4**(**6**) (1997), 843-854.

[37] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Diff. Geom., **6** (1971/1972), 119-128.

[38] S.Y. Cheng, P. Li and S.-T. Yau, *Heat equations on minimal submanifolds and their applications*, Amer. J. Math., **106** (1984), 1033-1-65.

[39] S.Y. Cheng and S.-T. Yau, *On the regularity of the Monge-Ampère equation* $\det((\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j)) = F(x, u)$, Comm. Pure Appl. Math., **30** (1977), 41-68.

[40] S.Y. Cheng and S.-T. Yau, *Complete affine hypersurfaces, Part* I. *The completeness of affine metrics*, Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 839-866.

[41] S.Y. Cheng and S.-T. Yau, *Inequality between Chern numbers of singular Kähler surfaces and characterization of orbit space of discrete group of* SU(2, 1), in 'Complex differential geometry and nonlinear differential equations' (Brunswick, Main, 1984), 31-44, Contemp. Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[42] T.-M. Chiang, A. Klemm, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Local mirror symmetry: calculations and interpretations*, in preparation.

[43] H.I. Choi and A. Wang, *A first eigenvalue for minimal hypersurfaces*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 559-562.

[44] C.H. Clemens, *Degeneration techniques in the study of threefolds*, in 'Algebraic threefolds' (Varenna, 1981), 93-154; Lecture Notes in Math., **947**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[45] C.H. Clemens, *Homological equivalence modulo algebraic equivalence is not finitely generated*, Publ. Math. IHES, **58** (1983), 19-38.

[46] E. Cohn-Vossen, *Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematish-Physikalische Klasse, 1927, 125-134.

[47] E. Cohn-Vossen, *Unstarre geschlossene Flächen*, Math. Annalen, **102** (1929-30), 10-29.

[48] T.H. Colding and W.P. Minicozzi II, *Harmonic functions on manifolds*, Ann. of Math., **146** (**3**) (1997), 725-747.

[49] R. Connelly, *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **47** (1977), 333-338.

[50] L.J. Dixon, *Some world-sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise*, in 'Superstrings, unified theories and cosmology 1987' (Trieste, 1987), 67-126, ICTP Ser. Theoret. Phys., **4**, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1988.

[51] S.K. Donaldson, *Anti Self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc., **50** (1985), 1-26.

[52] C. Doran, *Picard-Fuchs uniformization and geometric isomonodromic deformations: Modularity and variation of the mirror map*, Harvard thesis, 1999.

[53] B. Dubrovin, *Integrable systems in topological field theory*, Nucl. Phys. B, **379** (1992), 627-689.

[54] N.V. Efimov, *Impossibility of a complete surface in 3-space whose Gaussian curvature has a negative upper bound*, Soviet Math., **4** (1963), 843-846.

[55] R. Friedman, *Simultaneous resolution of threefold double points*, Math. Ann., **274**(**4**) (1986), 671-689.

[56] R. Friedman and J.W. Morgan, *Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants*, J. Algebraic Geom., **6**(**3**) (1997), 445-479.

[57] C. Frohman and W.H. Meeks, III, *The ordering theorem for the ends of properly embedded minimal surfaces*, Topology, **36**(**3**) (1997), 605-617.

[58] K. Fukaya and Y.-G. Oh, *Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy*, Asian J. Math., **1**(**1**) (1997), 96-180.

[59] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics*, Invent. Math., **73** (1983), 437-443.

[60] P. Gauduchon, *Le théorème de l'excentricité nulle*, C.R.A.S. Paris, Série A, **285** (1977), 387-390.

[61] P. Gauduchon, *Fibrés Hermitiens a endomorphisme de Ricci non négatif*, Bull. Soc. Math. France, **105** (1977), 113-140.

[62] K.F. Gauss, *General investigations of curved surfaces*, Raven Press, New York, 1965.

[63] I.M. Gelfand, A.V. Kapranov and A.V. Zelevinsky, *Hypergeometric functions and toric varieties*, Func. Anal. Appl., **23** (1989), 94-106; Correction in Func. Anal. Appl., **27** (1993), 295.

[64] I.M. Gelfand, A.V. Kapranov and A.V. Zelevinsky, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Adv. Math., **84**(**2**) (1990), 255-271.

[65] D. Gepner, *Exactly solvable string compactifications on manifolds of* SU($N$) *holonomy*, Phys. Lett. B, **199** (1987), 380-388.

[66] R. Geroch, *A method for generating solutions of Einstein's equations*, I, II, J. Math. Phys., **12** (1971), 918-924; J. Math. Phys., **13** (1972), 394-404.

[67] G.W. Gibbons, S.W. Hawking and M.J. Perry, *Path integrals and the indefiniteness of the gravitational action*, Nuclear Phys. B, **138**(**1**) (1978), 141-150.

[68] D. Gieseker, *On moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. of Math., **106** (1977), 45-60.

[69] A. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, Int. Math. Res. Notices, **1996**(**13**), 613-663.

[70] L. Göttsche, *A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces*, alg-geom/9711012.

[71] B.R. Greene, D.R. Morrison and A. Strominger, *Black hole condensation and the unification of string vacua*, Nuclear Phys. B, **451** (bf 1-**2**) (1995), 109-120.

[72] B.R. Greene and M.R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nucl. Phys. B, **338** (1990), 15-37.

[73] B.R. Greene, C. Vafa and N.P. Warner, *Calabi-Yau manifolds and renormalization group flows*, Nucl. Phys. B, **324** (1989), 371-390.

[74] D. Gromoll and W. Meyer, *An exotic sphere with nonnegative sectional curvature*, Ann. of Math., **100** (**2**) (1974), 401-406.

[75] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comm. Math. Helv., **56** (1981), 179-195.

[76] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., **82** (**2**) (1985), 307-347.

[77] M. Gromov and H.B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math.,**111** (**3**) (1980), 423-434.

[78] M. Gromov and H.B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. IHES, **58** (1983), 83-196.

[79] M. Gross, *Special Lagrangian fibrations* I: *Topology*, alg-geom/9710006.

[80] M. Gross, *Special Lagrangian fibrations* II: *Geometry*, math.AG/9809072.

[81] M. Gross and P.M.H. Wilson, *Mirror symmetry via* 3-*tori for a class of Calabi-Yau threefolds*, Math. Ann., **309** (**3**) (1997), 505-531.

[82] B. Guan and J. Spruck, *Boundary-value problems in $S^n$ for surfaces of constant Gauss curvature.* Ann. of Math., **138** (**3**) (1993), 601-624.

[83] P. Guan and Y.Y. Li, *The Weyl problem with nonnegative Gauss curvature*, J. Diff. Geom., **39** (**2**) (1994), 331-342.

[84] M. Gursky and C. LeBrun, *On Einstein manifolds of positive sectional curvature*, math.DG/9807055.

[85] R.S. Hamilton, *Harnack estimate for the mean curvature flow*, J. Diff. Geom., **41** (**1**) (1995), 215-226.

[86] R.S. Hamilton, *Four-Manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom., **5** (**1**) (1997), 1-92.

[87] R.S. Hamilton, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom., to appear.

[88] R. Hardt and L. Simon, *Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem*, Ann. of Math., **110** (1979), no. 3, 439-486.

[89] R. Harvey and H.B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47-157.

[90] S.W. Hawking, *Gravitational radiation in an expanding universe*, J. of Math. Phys., **9**(**4**) (1968), 598-604.

[91] N.J. Hitchin, *Compact four-dimensional Einstein manifolds*, J. Diff. Geom., **9** (1974), 435-441.

[92] N.J. Hitchin, *The moduli space of special Lagrangian submanifolds*, dg-ga/9711002.

[93] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys., **108** (1987), 535-589.

[94] D. Hoffman and H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, Geometry, V, 5-93, 267-272, Encyclopedia Math. Sci., **90**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[95] J.X. Hong, *Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations*, Math. Z., **209**(**2**) (1992), 289-306.

[96] J.X. Hong, *Realization in* $\mathbb{R}^3$ *of complete Riemannian manifolds with negative curvature*, Comm. Anal. Geom., **1**(**3-4**) (1993), 487-514.

[97] S. Hosono, A. Klemm, S. Thiesen and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, mirror map and applications to Calabi-Yau hypersurfaces*, Comm. Math. Phys., **167**(**2**) (1995), 301-350; *Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi-Yau spaces*, Nucl. Phys. B, **433**(**3**) (1995), 501-522.

[98] S. Hosono, B. Lian and S.-T. Yau, *Maximal degeneracy points of GKZ systems*, J.A.M.S., **10**(**2**) (1997), 427-443.

[99] L. Hsu, R. Kusner and J. Sullivan, *Minimizing the squared mean curvature integral for surfaces in space form*. Exper. Math., **1** (**3**) (1992), 191-207.

[100] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Diff. Geom., **31**(**1**) (1990), 285-299.

[101] G. Huisken and T. Ilmanen, J. Diff. Geom, to appear.

[102] G. Huisken and C. Sinestrari, *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*, April 1997, preprint.

[103] M. Inoue, *On surfaces of class* $\mathrm{VII}_0$, Invent. Math., **24** (1974), 269-310.

[104] D.D. Joyce, *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy* $G_2$, I, II, J. Diff. Geom., **43**(**2**) (1996), 291-328, 329-375.

[105] D.D. Joyce, *Compact* 8*-manifolds with holonomy* Spin(7), Invent. Math., **123**(**3**) (1996), 507-552.

[106] N. Karmarkar, *Riemannian geometry underlying interior-point methods for linear programming*, 'Mathematical developments arising from linear programming' (Brunswick, ME, 1988), Contemp. Math., **114** (1990), 51-75.

[107] A. Klemm, B.H. Lian, S.S. Roan and S.-T. Yau, *A note on ODEs and mirror symmetry*, Functional Analysis on the eve of the 21st Century, Vol. II, Progr. Math., **132** Birkhäuser, Boston (1993), 301-323.

[108] A. Klemm, P. Mayr and C. Vafa, *BPS states of exceptional non-critical strings*, hep-th/9607139.

[109] W. Klingenberg, *Über Riemannische Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comment. Math. Helv., **35** (1961), 47-54.

[110] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1987.

[111] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions*, in 'The moduli space of curves' (R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer, eds.), Birkhäuser, Boston (1995), 335-368.

[112] N. Korevaar, *Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics*, J. Diff. Geom., **37** (1993), 73-93.

[113] D. Kotschick, *Einstein metrics and smooth structures*, Geom. Topol. (electronic), **2** (1998), 1-10.

[114] V.S. Kulikov, *Degenerations of* K3 *surfaces and Enriques surfaces*, Math. USSR-Izv., **11**(**5**) (1978), 957-989.

[115] H.B. Lawson and S.T. Yau, *Scalar curvature, non-abelian group actions and the degree of symmetry of exotic spheres*, Comm. Math. Helv. **49** (1974), 232-244.

[116] C. LeBrun, *Einstein metrics and Mostow rigidity*, Math. Res. Lett., **2** (**1**) (1995), 1-8.

[117] W. Lerche, C. Vafa and N.P. Warner, *Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories*, Nucl. Phys. B, **324** (1989), 427-474.

[118] N.C. Leung, *Einstein type metrics and stability on vector bundles*, J. Diff. Geom., **45** (1997), 514-546.

[119] N.C. Leung, *Bando Futaki invariants and Kähler Einstein metric*, Comm. in Analysis and Geom., **6**(**4**) (1998), 799-808.

[120] N.C. Leung, *Uniformization of four manifolds*, dg-ga/9705001.

[121] H. Lewy, *On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., **24**(**2**) (1938), 104-106.

[122] T.-J. Li and A.-K. Liu, *General wall crossing formula*, Math. Res. Lett., **2**(**6**) (1995), 797-810.

[123] T.-J. Li and A.-K. Liu, *Symplectic structure on ruled surfaces and a generalized adjunction formula*, Math. Res. Lett., **2**(**4**) (1995), 453-471.

[124] J. Li and G. Tian, *Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties*, J. Amer. Math. Soc., **11**(**1**) (1998), 119-174.

[125] J. Li and G. Tian, *Comparison of the algebraic and the symplectic Gromov-Witten invariants*, alg-geom/9712035.

[126] J. Li and S.-T. Yau, *Hermitian-Yang-Mills connection on non-Kähler manifolds*, in 'Mathematical aspects of string theory', 560-573 (San Diego, 1986); Adv. Ser. Math. Phys., **1**, World Sci. Publ., Singapore.

[127] J. Li, S.-T. Yau and F. Zheng, *A simple proof of Bogomolov's theorem on class* $\mathrm{VII}_0$ *surfaces with* $b_2 = 0$, Illinois J. Math., **34**(**2**) (1990), 217-220.

[128] P. Li, *Harmonic sections of polynomial growth*, Math. Research Letters, **4** (1997), 35-44.

[129] P. Li, R. Schoen and S.-T. Yau, *On the isoperimetric inequality for minimal surfaces*, Ann. Scuola Norm., **9** (1984), 237-244.

[130] P. Li and S.-T. Yau, *A new conformal invariant and its applications to the Willmore Conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math., **69** (1982), 269-291.

[131] B. Lian, K. Liu and S.-T. Yau, *Mirror principle*, I, Asian J. Math., **1**(**4**) (1997), 729-763.

[132] B.H. Lian and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, rational curves on algebraic manifolds and hypergeometric series*, in 'ICMP Proceedings Paris 1994', 163-184, IP, 1995.

[133] B.H. Lian and S.-T. Yau, *Mirror maps, modular relations and hypergeometric series* I.

[134] B.H. Lian and S.-T. Yau, *Mirror maps, modular relations and hypergeometric series* II. *S*-duality and mirror symmetry (Trieste, 1995), Nucl. Phys. B Proc. Suppl., **46** (1996), 248-262.

[135] B.H. Lian and S.-T. Yau, *Integrality of certain exponential series*, in 'Algebra and Geometry, Proceedings of the International Conferance of Algebra and Geometry', 215-227, IP, 1998.

[136] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C.R.A.S. Série 1, **257** (1963), 7-9.

[137] C.-S. Lin, *The local isometric embedding in* $\mathbb{R}^3$ *of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature*, J. Diff. Geom., **21** (1985), 213-230.

[138] C.-S. Lin, *The local isometric embedding in* $\mathbb{R}^3$ *of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly*, Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 867-887.

[139] A.-K. Liu, *Family blow up formula, admissable graphs and the counting of nodal curves*, preprint.

[140] A.-K. Liu, *On modular invariance and rigidity theorems*, J. Dierential Geom. **41** (1995), 343-396.

[141] M. Lübke, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*, Manuscripta Math., **42** (1983), 245-257.

[142] Yu.I. Manin, *Generating functions in algebraic geometry and sums over trees*, in 'The Moduli Space of Curves', eds. R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer, Progress in Math., Vol 129, Birkhäuser, Boston (1995), 401-418.

[143] M. Maruyama, *Moduli of stable sheaves*, I, II, J. Math. Kyoto Univ., **17** (1977), 91-126.

[144] Y. Matsushima, *Sur la structure du groupe d'homeomorphismes analytiques d'une certaine variété Kaehlerienne*, Nagoya Math. J., **11** (1957), 145-150.

[145] R.C. McLean, *Deformation of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom., **6**(**4**) (1998), 705-747.

[146] W.H. Meeks, III, J. Perez and A. Ros, *Uniqueness of the Riemann minimal examples*, Invent. Math., **133**(**1**) (1998), 107-132.

[147] W.H. Meeks, III, and S.-T. Yau, *The equivariant loop theorem for three-dimensional manifolds and a review of the existence theorems for minimal surfaces*, in 'The Smith conjecture', Academic Press, New York (1984), 153-163.

[148] M. Micallef and J.D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. Math., **127** (1988), 199-227.

[149] J.H. Michael and L.M. Simon, *Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of* $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math., **26** (1973), 361-379.

[150] H. Minkowski, *Volumen und Oberfläche*, Math. Ann., **57** (1903), 447-495.

[151] N. Mok, *Compactification of complete Kähler surfaces of finite volume satisfying certain curvature conditions*, Ann. of Math., **129**(**2**) (1989), 383-425.

[152] N. Mok and J.Q. Zhong, *Compactifying complete Kähler-Einstein manifolds of finite topological type and bounded curvature*, Ann. of Math., **129** (**3**) (1989), 427-470.

[153] G. Moore, *Attractors and arithmetic*, hep-th/9807056; *Arithmetic and attractors*, hep-th/9807087.

[154] G. Moore and E. Witten, *Integration over the u-plane in Donaldson theory*, Adv. Theor. Math. Phys., **1**(**2**) (1997), 298-387.

[155] D. Morrison and R. Plesser, *Summing the instantons: quantum cohomology and mirror symmetry in toric varieties*, alg-geom/9412236.

[156] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math., **77**(**1**) (1984), 101-116.

[157] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, Academic Press, New York, 1965.

[158] N. Nadirashvili, *Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces*, Invent. Math., **126** (1996), 457-465.

[159] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math., **63** (1956), 20-63.

[160] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math., **6** (1953), 337-394.

[161] L. Nirenberg, *Rigidity of a class of closed surfaces*, Nonlinear problems, R.E. Langer (Editor), Univ. of Wisconsin Press, Madison, (1963), 177-193.

[162] R. Pandharipande, *Rational curves on hypersurfaces* (*after A. Givental*), math.AG/9806133.

[163] T. Parker and J. Wolfson, *A compactness theorem for Gromov's moduli space*, J. Geom. Anal., **3** (1993), 63-98.

[164] U. Persson and H. Pinkham, *Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle*, Ann. of Math., **113**(**1**) (1981), 45-66.

[165] I.I. Piatetski-Shapiro and I.R. Shafarevich, *Torelli's theorem for algebraic surfaces of type* K3, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **35** (1971), 530-572.

[166] A.V. Pogorelov, *The rigidity of general convex surfaces*, Doklady, Akademia nauk, SSSR, (N.S.), **79** (1951), 739-742.

[167] A.V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, "Nauka", Moscow, 1969; English trans., Math. Monographs, Vol 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

[168] H.E. Rauch, *A contribution to differential geometry in the large*, Ann. of Math., **54** (1951), 38-55.

[169] D.B. Ray and I.M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math., **98** (1973), 154-177.

[170] M. Reid, *The moduli space of* 3*-folds with* $K = 0$ *may nevertheless be irreducible*, Math. Ann., **278(1-4)** (1987), 329-334.

[171] M. Roček, *Modified Calabi-Yau manifolds with torsion*, Essays on mirror manifolds, 480-488; Internat. Press, Hong Kong, 1992.

[172] Y. Ruan, *Topological sigma model and Donaldson-type invariants in Gromov theory*, Duke Math. J., **83(2)** (1996), 461-500.

[173] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomology*, J. Diff. Geom., **42(2)** (1995), 259-367.

[174] Y. Ruan and G. Tian, *Higher genus symplectic invariants and sigma models coupled with gravity*, Invent. Math., **130(3)** (1997), 455-516.

[175] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. Math., **113** (1981), 1-24.

[176] T. Schick, *A counterexample to the (unstable) Gromov-Lawson-Rosenberg conjecture*, Topology, **37(6)** (1998), 1165-1168.

[177] R. Schoen, *A remark on minimal hypercones*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **79** (1982), 4523-4524.

[178] R. Schoen and J. Wolfson, *Minimizing volume among Lagrangian submanifolds*. Differential equations: La Pietra 1996 (Florence), 181-199, Proc. Symp. Pure Math., **65**, A.M.S., Providence, RI, 1999.

[179] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures on differential geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I, International Press, Cambridge, MA, 1994.

[180] R. Schoen and S.-T. Yau, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, Ann. Math., **110** (1979), 127-142.

[181] R. Schoen and S.-T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. in Math. Phys., **65(1)** (1979), 45-76.

[182] R. Schoen and S.-T. Yau, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, Manuscripta Math., **28** (1979), 159-183.

[183] R. Schoen and S.-T. Yau, *Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature*, Seminar on Differential Geometry, Princeton University Press, Princeton, 1982, 209-228.

[184] R. Schoen and S.-T. Yau, *The existence of a black hole due to condensation of matter*, Comm. Math. Phys., **90** (1983), 575-579.

[185] B. Siebert, *Algebraic and symplectic Gromov-Witten invariants coincide*, math.AG/9804108.

[186] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom., **1** (1993), no. 2, 281-326.

[187] Y.T. Siu, *Every* K3 *surface is Kähler*, Invent. Math., **73**(**1**) (1983), 139-150.

[188] Y.T. Siu and S.-T. Yau, *Compactification of negatively curved complete Kähler manifolds of finite volume*, Seminar on Differential Geometry, 363-380, Ann. of Math. Stud., **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.

[189] S. Stolz, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Annals of Math., **136**(**3**) (1992), 511-540.

[190] S. Stolz, *A conjecture concerning positive Ricci curvature and the Witten genus*, Math. Ann., **304**(**4**) (1996), 785-800.

[191] A. Strominger, *Special geometry*, Comm. Math. Phys., **133**(**1**) (1990), 163-180.

[192] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B, **479** (1996), no. 1-2, 243-259.

[193] D. Sullivan, *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold*, J. Diff. Geo., **18** (1983), 723-732.

[194] C.H. Taubes, *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds*, J. Diff. Geom., **17** (1982), 139-170.

[195] C.H. Taubes, *The existence of anti-self-dual conformal structures*, J. Diff. Geom., **36**(**1**) (1992), 163-253.

[196] C.H. Taubes, *SW* $\Rightarrow$ *Gr : from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves*, J. Amer. Math. Soc., **9**(**3**) (1996), 845-918.

[197] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric*, in 'Mathematical aspects of string theory' (San Diego, Calif., 1986), 629-646, Adv. Ser. Math. Phys., **1**, World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

[198] G. Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Diff. Geom., **32**(**1**) (1990), 99-130.

[199] G. Tian, *On Calabi's conjecture for complex sufaces with positive first Chern class*, Invent. Math., **101**(**1**) (1990), 101-172.

[200] G. Tian, *Smoothing* 3*-folds with trivial canonical bundle and ordinary double points*, in 'Essays on mirror manifolds', 458-479, Internat. Press, Hong Kong, 1992.

[201] G. Tian, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math., **130**(**1**) (1997), 1-37.

[202] G. Tian, *Yang-Mills equations and calibrated submanifolds*, preprint.

[203] G. Tian and S.-T. Yau, *Three-dimensional algebraic manifolds with $C_1 = 0$ and $\chi = -6$*, in 'Math. Aspects of String Theory' (San Diego, Calif., 1986), 543-559, Adv. Ser. Math. Phys., **1**, World Sci. Publ., Singapore.

[204] G. Tian and S.-T. Yau, *Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry*, Math. Aspects of String Theory (San Diego), Adv. Ser. Math. Phys., **1** (1986), 574-628, World Sci. Publ., Singapore.

[205] G. Tian and S.-T. Yau, *Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature* I, II, J.A.M.S., **3** (1990), 579-610; Invent. Math., **106** (1991), 27-60.

[206] G. Tian and X.H. Zhu, Uniqueness of Kähler-Ricci solitons, preprint.

[207] A.N. Todorov, *Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of* K3 *surfaces*, Invent. Math., **61**(**3**) (1980), 251-265.

[208] A.N. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of* SU($n \geq 3$) (*Calabi-Yau*) *manifolds*,I, COMM. MATH. Phys., **126**(**2**) (1989), 325-346.

[209] F. Tomi, *On the finite solvability of Plateau's problem*, Lect. Notes Math., **597**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1977), 679-695.

[210] V.A. Topogonov, *Riemannian spaces which contain straight lines*, AMS Translations, Ser. 2, Vol. 37, (1964), 287-290.

[211] N.S. Trudinger and X.-J. Wang, *Bernstein problem for affine maximal hypersurfaces*, preprint.

[212] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), S257-S293; *A note on our previous paper: On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math., **42** (1989), 703-707.

[213] C. Vafa, *Extending mirror conjecture to Calabi-Yau with bundles*, hep-th/9804131.

[214] C.-L. Wang, *On the incompleteness of the Weil-Petersson metric along degenerations of Calabi-Yau manifolds*, Math. Res. Lett., **4**(**1**) (1997), 157-171.

[215] C.-P. Wang, *Some examples of complete hyperbolic affine 2-spheres in* $\mathbb{R}^3$, in 'Global Differential Geometry and Global Analysis', Proceedings, Berlin, 1990; Lecture Notes in Math., **1481**, Springer-Verlag, Berlin, (1991), 272-280.

[216] M.Y. Wang and W. Ziller, *Einstein metrics on principal torus bundles*, J. Diff. Geom., **31**(**1**) (1990), 215-248.

[217] H. Wente, *Counterexample to a question of H. Hopf*, Pacific J. Math., **121** (1986), 193-243.

[218] H. Weyl, *Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement*, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich, **61** (1916), 40-72.

[219] T.J. Willmore, *Note on embedded surfaces*, Anal. Stüntifice ale Univ., Iasi Sect. I a Mat., **11** (1965), 493-496.

[220] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geom., **1** (1991), 243-310.

[221] S.-T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **74**(**5**) (1977), 1798-1799.

[222] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the Monge-Ampere equation*, I, Comm. Pure Appl. Math., **31** (1978), 339-411.

[223] S.-T. Yau, *Compact three dimensional Kähler manifolds with zero Ricci curvature*, Proc. of the Symposium on Anomalies, Geometry and Topology, Argonne, World Scientific, (1985), 395-406.

[224] S.-T. Yau, *Nonlinear analysis in geometry*, Enseign. Math., **33**(**1-2**) (1987), 108-159. (reprinted in [177])

[225] S.-T. Yau, *A splitting theorem and an algebraic geometric characterization of locally Hermitian symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom., **1**(**3-4**) (1993), 473-486.

[226] S.-T. Yau and E. Zaslow, *BPS States, String Duality, and Nodal Curves on K*3, Nuclear Physics B, **471** (1996), 503-512; hep-th/9512121.

[227] S.-K. Yeung, *Compactification of Kähler manifolds with negative Ricci curvature*, Invent. Math., **106**(**1**) (1991), 13-25.

[228] S. Zelditch, *Szegö kernels and a theorem of Tian*, Internat. Math. Res. Notices, **1998** (**6**), 317-331.

[229] S. Zhang, *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math., **136**(**3**) (1992), 569-587.

## 文献追加

[230] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine and B. Kim *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, math.AG/0304403.

[231] K. Hori and C. Vafa, *Mirror Symmetry*, hep-th/0002222.

[232] B. Lian, C.H. Liu, K. Liu, and S.T. Yau, $S^1$*-fixed points of Quot Schemes and Mirror Principle computations*, math.AG/0111256, Contemp. Math. vol. 322 (2003) 165-194.

[233] B. Lian, K. Liu, and S.T. Yau, *Mirror principle, I*, *Asian J. Math.* **1** (1997), pp. 729 - 763.

[234] B. Lian, K. Liu, and S.T. Yau, *Mirror principle II*, *Asian J. Math.* **3** (1999), pp. 109 - 146.

[235] B. Lian, K. Liu, and S.T. Yau, *Mirror principle III*, *Asian J. Math.* **3** (1999), pp. 771 - 800.

[236] B. Lian, K. Liu, and S.T. Yau, *Mirror principle IV*, Surveys Diff. Geom., VII, 475–496, International Press, Somerville, MA, 2000.

[237] B. Lian, K. Liu, and S.T. Yau, *Some Applications of Mirror Principle*, Conference Proceedings SISTAG July 2001, Contemp. Math. vol. 314 (2002) 161-167.

[238] C.-C. Liu, K. Liu, and J. Zhou, *On a proof of a conjecture of Marino-Vafa on Hodge integrals*, math.AG/0306257.

[239] C.H. Liu, K. Liu, and S.T. Yau, *On A-twisted moduli stack for curves from Witten's gauged linear sigma models*, math.AG/0212316

[240] M. Marino, C. Vafa, *Framed knots at large N*, hep-th/0108064.

# 索　引

◆欧文・記号



◆和文

**編　者**

**V.I. アーノルド (V.I.Arnold)**
Université Paris-Dauphine, France
Steklov Mathematical Institute, Russia

**M. アティヤ (M.Atiyah)**
Honorary Professor at Edinburgh University, UK

**P. ラックス (P.Lax)**
Courant Institute of Mathematical Sciences, USA

**B. メイザー (B.Mazur)**
Harvard University, USA

**日本語版監修者**
砂田　利一（明治大学教授）

**著　者**
A. ベイカー (A. Baker)
G. ヴュストルツ (G. Wüstholz)
Yu.I. マニン (Yu.I. Manin)
B. メイザー (B. Mazur)
S.-T. ヤオ (S.-T. Yau)

**訳　者**
平田　典子　(日本大学教授)
砂田　利一　(明治大学教授)
梶原　健　(東北大学助手)
納谷　信　(名古屋大学助教授)

**数学の最先端　21世紀への挑戦 volume 5**
**Mathematics : Frontiers and Perspectives**　　**定価 (本体 2,200 円+税)**

発　　行　2004 年 8 月 31 日
編　　者　V.I. アーノルド, M. アティヤ, P. ラックス, B. メイザー
日本語版監修者　砂田　利一
発 行 者　平野　皓正
発 行 所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033　東京都文京区本郷 3 丁目 3 番 13 号
TEL (03) 3812-0757 (営業直通)
印 刷 所　平河工業社


ISBN 4-431-71122-8 C3041　　http://www.springer-tokyo.co.jp

Springer

## シュプリンガー数学クラシックス